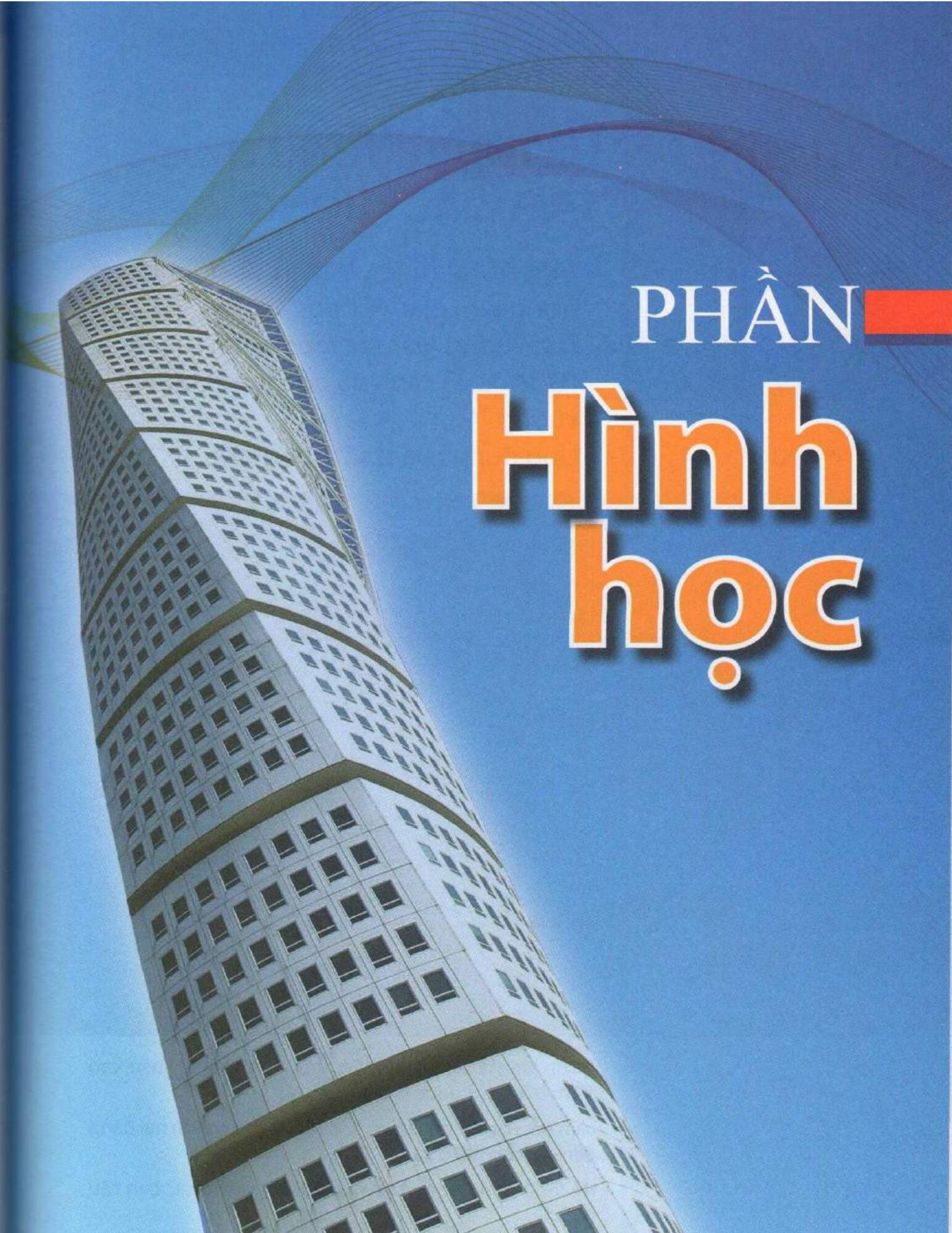
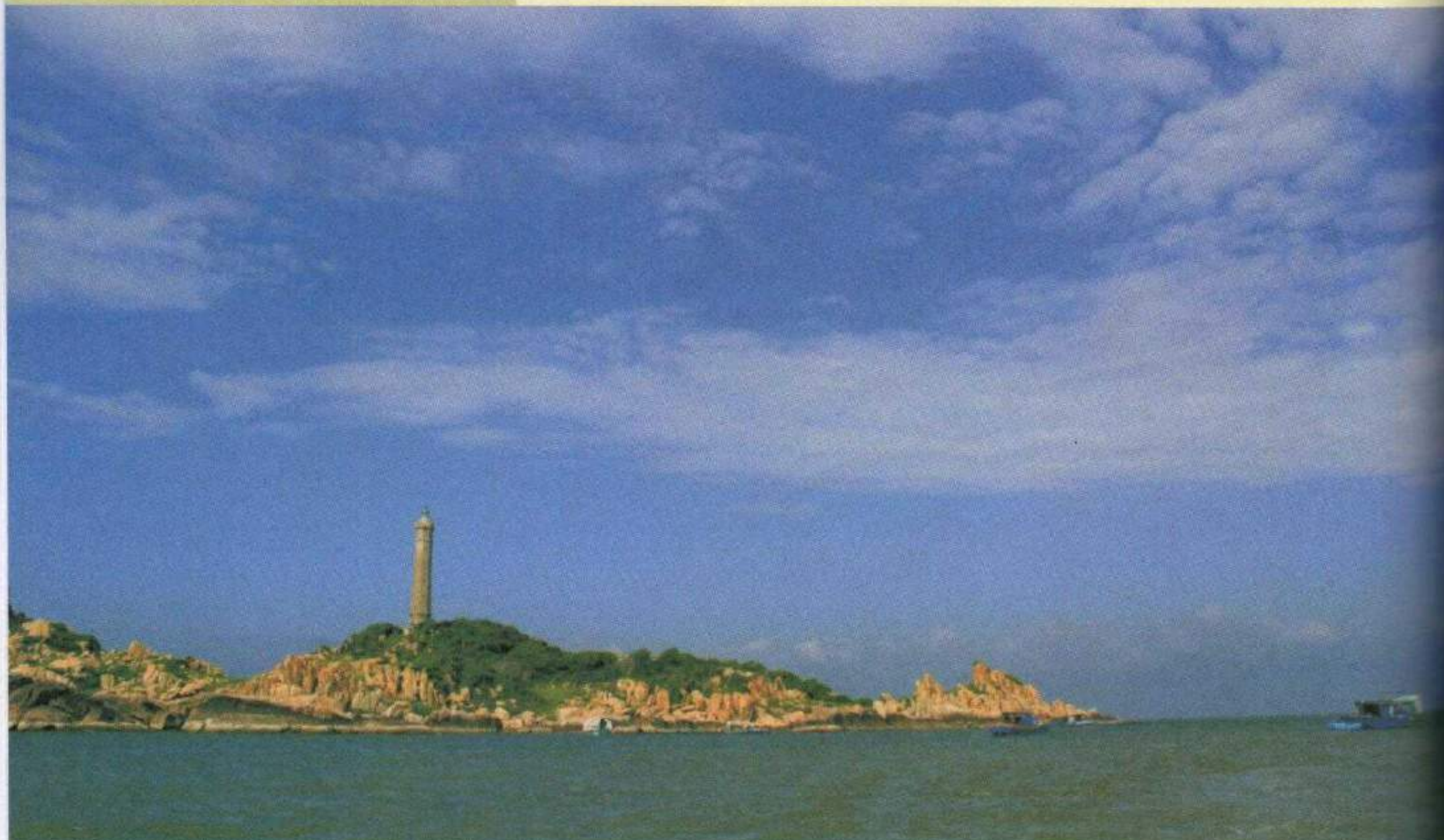
PHẦN
Hình học



CHƯƠNG 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

- Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông
- Tỉ số lượng giác của góc nhọn
- Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông
- Ứng dụng của tỉ số lượng giác



Trong hình là hải đăng Kê Gà, thuộc tỉnh Bình Thuận, cao 65 m trên mực nước biển.

Làm thế nào để tính được khoảng cách từ ngọn hải đăng đến các con tàu ở xa ?

Hệ thức lượng trong tam giác vuông sẽ cho các bạn câu trả lời.

CHỦ ĐỀ 1

MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

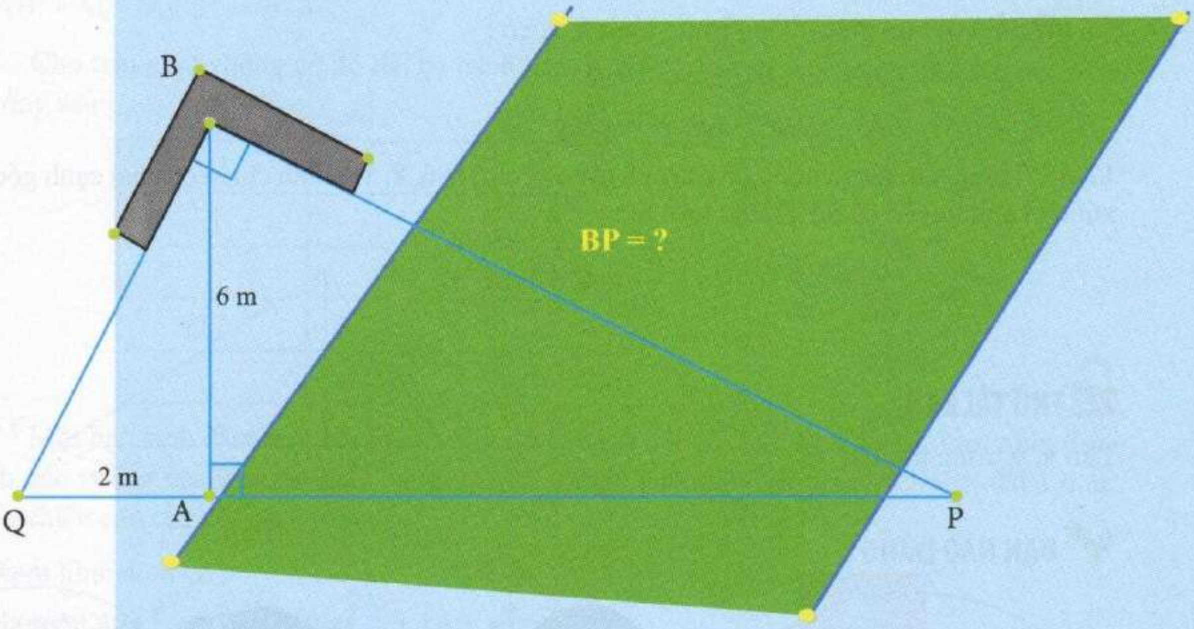
Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

Hệ thức giữa ba cạnh của tam giác vuông

Hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền

Hệ thức diện tích

Hệ thức giữa đường cao và hai cạnh góc vuông



Trong đời sống hằng ngày, chúng ta thường gặp các bài toán liên quan đến tính toán cạnh và đường cao của các tam giác vuông.

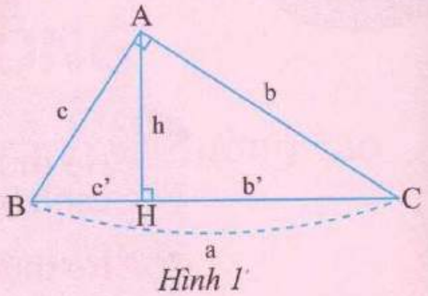
1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH GÓC VUÔNG VÀ HÌNH CHIẾU CỦA NÓ TRÊN CẠNH HUYỀN

Hoạt động 1

Xét tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC = a, các cạnh góc vuông AC = b và AB = c. Gọi AH = h là đường cao ứng với cạnh huyền và HC = b', HB = c' lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC.

a) Chứng minh các tam giác HBA và ABC đồng dạng, từ đó so sánh c^2 và c'.a.

b) Chứng minh các tam giác HCA và ACB đồng dạng, từ đó so sánh b^2 và b'.a.



Hình 1

Định lí 1

Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

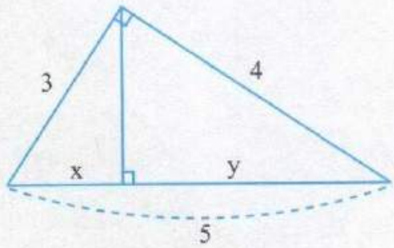
Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 1, ta có :

$$BA^2 = BC.BH \text{ hay } c^2 = a.c' ;$$

$$CA^2 = CB.CH \text{ hay } b^2 = a.b'.$$

Ví dụ : Trong tam giác vuông có ba cạnh (đơn vị cm) là 6, 8, 10, hình chiếu của hai cạnh góc vuông xuống cạnh huyền có độ dài lần lượt là :

$$\frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ (cm) ; } \quad \frac{8^2}{10} = 6,4 \text{ (cm).}$$

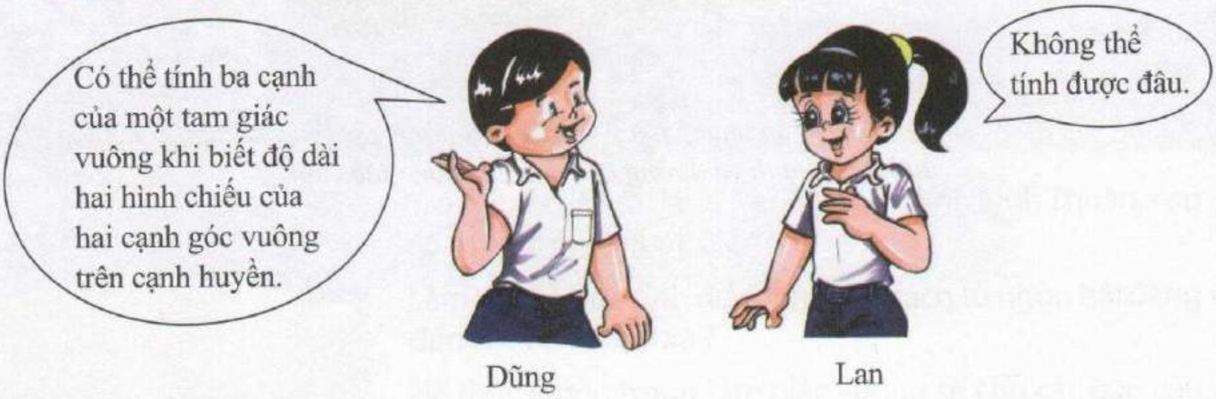


Hình 2

THỬ TÀI BẠN

Tìm x, y trong hình 2.

BẠN NÀO ĐÚNG ?



Theo em, bạn nào đúng ?

2. HỆ THỨC GIỮA BA CẠNH CỦA TAM GIÁC VUÔNG

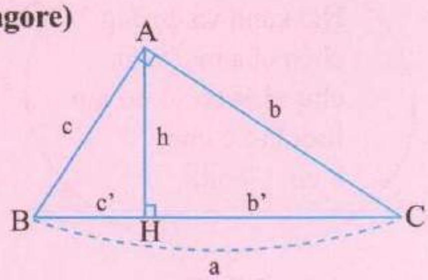
Hoạt động 2 **(Một cách khác để chứng minh định lí Pythagore)**

– So sánh a với tổng b' + c'.

– Hãy cộng hai đẳng thức (1) và (2) sau đây, rồi rút gọn và nêu nhận xét :

$b^2 = a.b'$ (1)

$c^2 = a.c'$ (2)



Hình 3

Định lí Pythagore

> *Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.*

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 3, ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2$.

Ví dụ 1 : Cho tam giác vuông có độ dài ba cạnh là a, b, c (a > b > c). Điền các số thích hợp vào các ô trống sau :

a	b	c
5	4	
	12	5
17		8
	24	7

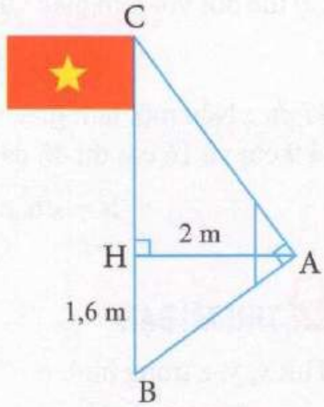
Ví dụ 2 : Một học sinh cầm một cái thước ê ke đứng cách cột cờ 2 m. Bạn ấy lần lượt nhìn theo hai cạnh góc vuông của ê ke thì thấy ngọn và gốc cột cờ. Biết mắt học sinh cách mặt đất 1,6 m. Hãy tính chiều cao của cột cờ.

Giải : Xem hình 4, ta có :

$$BH.BC = BA^2 = BH^2 + AH^2 = 1,6^2 + 2^2 = 6,56$$

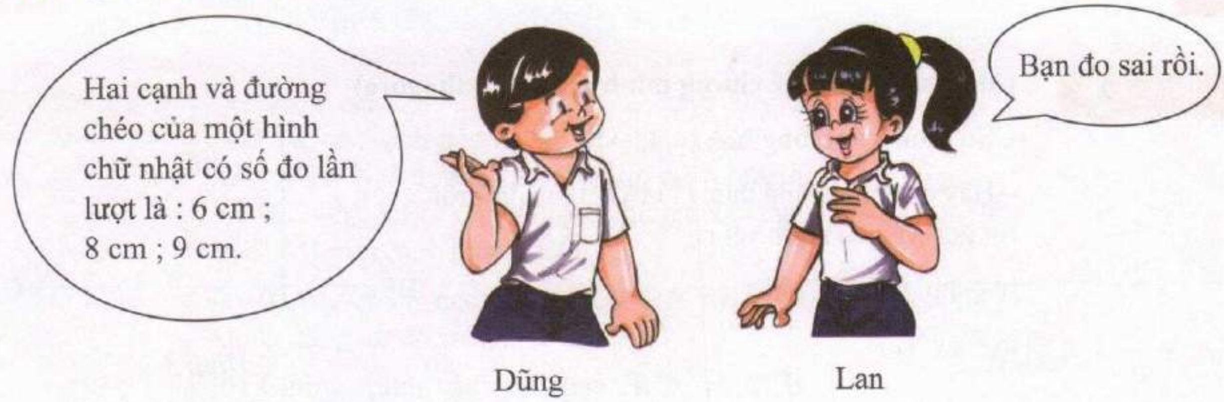
$$\Rightarrow BC = \frac{6,56}{1,6} = 4,1 \text{ (m)}.$$

Vậy cột cờ cao 4,1 m.



Hình 4

BẠN NÀO ĐÚNG ?



Theo em, bạn nào đúng ?

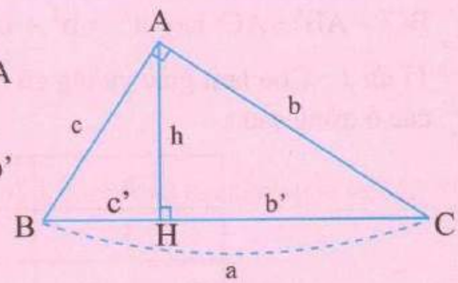
3. HỆ THỨC GIỮA ĐƯỜNG CAO ỨNG VỚI CẠNH HUYỀN VÀ HÌNH CHIẾU CỦA HAI CẠNH GÓC VUÔNG TRÊN CẠNH HUYỀN

Hoạt động 3

Xem hình 5.

a) Hãy chứng tỏ hai tam giác AHB và CHA đồng dạng.

b) Lập tỉ số đồng dạng, từ đó tính h theo b' và c'.



Hình 5

Định lí 2

Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 5, ta có :

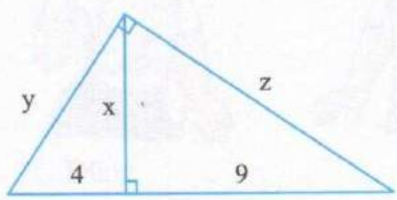
$$HA^2 = HB.HC \text{ hay } h^2 = b'.c'.$$

Ví dụ : Nếu một tam giác vuông có độ dài hình chiếu của hai cạnh góc vuông xuống cạnh huyền là 9 cm và 16 cm thì độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là :

$$h = \sqrt{b'.c'} = \sqrt{9.16} = 12 \text{ (cm)}.$$

THỬ TÀI BẠN

Tìm x, y, z trong hình 6.



Hình 6

4. HỆ THỨC DIỆN TÍCH

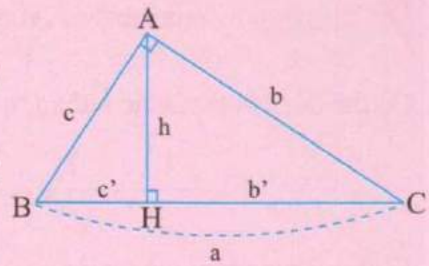
Hoạt động 4

Xem hình 7.

a) Hãy tính diện tích tam giác ABC theo cạnh huyền a và đường cao tương ứng h.

b) Hãy tính diện tích tam giác ABC theo hai cạnh góc vuông b, c.

c) So sánh và nêu nhận xét.



Hình 7

Định lí

Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 7, ta có :

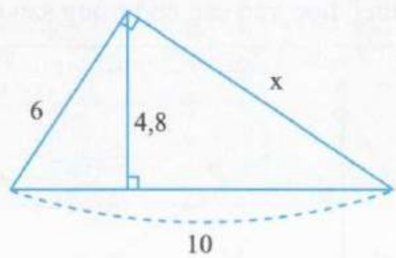
BC.AH = AB.AC hay b.c = a.h.

Ví dụ : Một tam giác vuông nếu có độ dài ba cạnh là 3 cm ; 4 cm ; 5 cm thì độ dài đường cao ứng với cạnh huyền bằng :

$$h = \frac{3.4}{5} = 2,4 \text{ (cm)}.$$

THỬ TÀI BẠN

Tìm x trên hình 8 bằng hai cách khác nhau.

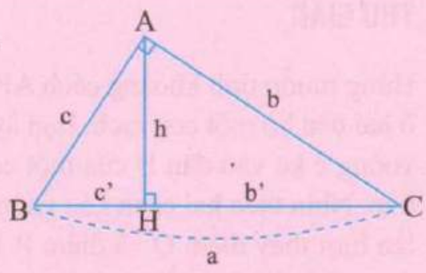


Hình 8

5. HỆ THỨC GIỮA ĐƯỜNG CAO VÀ HAI CẠNH GÓC VUÔNG

Hoạt động 5

Bằng cách sử dụng các đẳng thức $a^2 = b^2 + c^2$ và b.c = a.h, hãy tính theo h biểu thức $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ theo gợi ý sau : $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2}$.



Hình 9

Định lí

> *Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.*

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 9, ta có :

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2} \text{ hay } \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

Ví dụ : Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này mà không cần tính cạnh huyền.

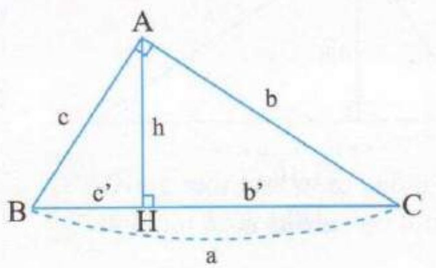
Giải : Áp dụng công thức $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, ta có :

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=\frac{25}{144} \Rightarrow h=\frac{12}{5}=2,4 \text{ (cm)}.$$

THỬ TÀI BẠN

1. Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông dài 6 cm và 8 cm. Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông bằng hai cách khác nhau.

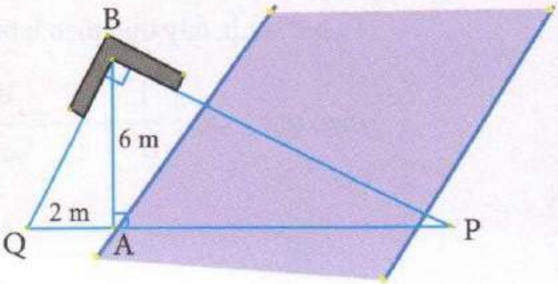
2. Điền các số thích hợp vào các chỗ trống sau đây :

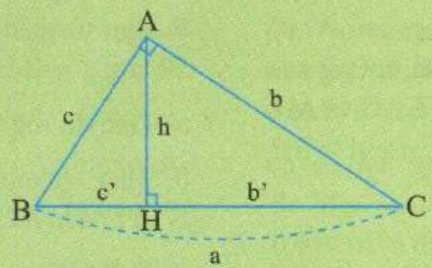
<table>
<tr><td rowspan="6">

c = 6 cm, b = 8 cm</td><td>a =</td></tr>
<tr><td>c' =</td></tr>
<tr><td>b' =</td></tr>
<tr><td>h =</td></tr>
<tr><td>S_{ABC} =</td></tr>
<tr><td>Chu vi tam giác ABC =</td></tr>
</table>

THƯ GIÃN

Hùng muốn tính khoảng cách AP nối hai điểm ở hai bên bờ một con rạch. Bạn ấy đặt đỉnh góc vuông ê ke vào đầu B của một cái sào BA dài 6 m. Nhìn theo hai cạnh góc vuông của ê ke thì lần lượt thấy điểm Q và điểm P. Hùng đo thấy đoạn QA dài 2 m. Em có thể tính nhẩm chiều dài đoạn AP được không ?





Trong một tam giác vuông

$c^2 = a.c'$	Bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.
$b^2 = a.b'$	
$a^2 = b^2 + c^2$	Bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.
$h^2 = b'.c'$	Bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.
$b.c = a.h$	Tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$	Nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 9 cm, BC = 15 cm. AH là đường cao (H thuộc cạnh BC). Tính BH, CH, AC và AH.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 5 cm, AB = 4 cm. Tính :

a) Cạnh huyền BC.

b) Hình chiếu của AB và AC trên cạnh huyền.

c) Đường cao AH.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 40 cm, AC = 36 cm. Tính AB, BH, CH và AH.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 24 cm. Tính AB, AC, cho biết $AB = \frac{2}{3}AC$.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. BH = 10 cm, CH = 42 cm. Tính BC, AH, AB và AC.

6. Cho đường tròn tâm O bán kính R = 10 cm. A, B là hai điểm trên đường tròn (O) và I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

a) Tính AB nếu OI = 7 cm.

b) Tính OI nếu AB = 14 cm.

7. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 53 cm. C là một điểm trên đường tròn sao cho AC = 45 cm. Gọi H là hình chiếu của C trên AB. Tính BC, AH, BH, CH và OH.

8. Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = 15 cm, đáy nhỏ CD = 5 cm và góc A bằng 60^{o}.

a) Tính cạnh BC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính MN.

9. Cho tứ giác ABCD có AB = AC = AD = 20 cm, góc B bằng 60^{o} và góc A bằng 90^{o}.

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính khoảng cách BH và DK từ hai điểm B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ BE vuông góc với DC kéo dài. Tính BE, CE, DC.

10. Cho đoạn thẳng AB = 2a. Từ trung điểm O của AB vẽ Ox vuông góc với AB. Trên Ox lấy điểm D sao cho $OD = \frac{a}{2}$. Từ B vẽ BC vuông góc với AD kéo dài.

a) Tính AD, AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn OE = a. Chứng minh bốn điểm A, C, B, E cùng nằm trên một đường tròn.

c) Vẽ đường vuông góc với BC tại B cắt CE tại F. Tính BF.

d) Gọi P là giao điểm của AB và CE. Tính AP và BP.

11. Cho tam giác ABC cân tại A có BC = 16 cm, AH = 6 cm. Vẽ điểm D trên đoạn BH sao cho BD = 3,5 cm. Chứng minh rằng tam giác DAC vuông.

LUYỆN TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết HB = 9 cm, HC = 16 cm. Tính các độ dài AB, AC.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 6 cm, HC – HB = 9 cm. Tính các độ dài HB, HC.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, đường cao AH = 18 cm. Tính chu vi tam giác ABC.

4. Cho hình thang ABCD có chiều dài hai đáy AB và CD lần lượt là 9 cm và 30 cm, chiều dài hai cạnh bên AD và BC lần lượt là 13 cm và 20 cm. Tính diện tích hình thang.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích 37,5 cm^2, AB < AC, đường cao AH có độ dài 6 cm. Tính các độ dài AB, AC.

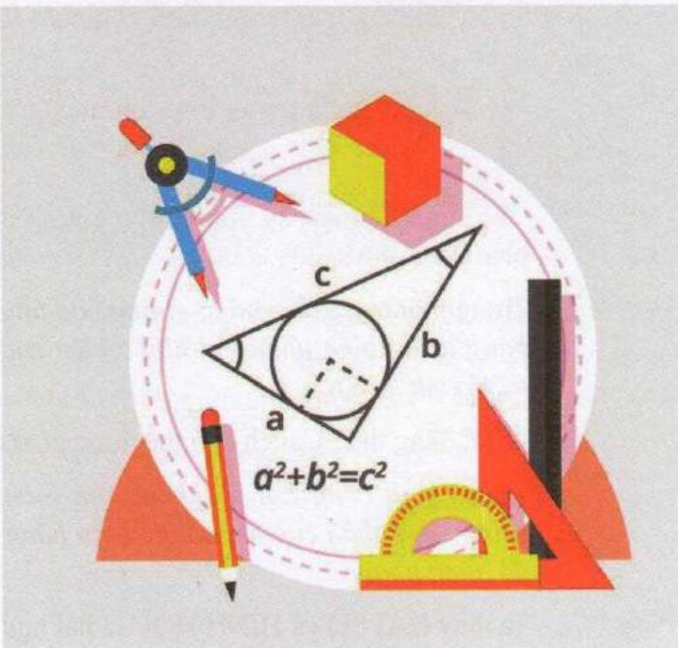
6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC và AM = m. Tính tổng $MB^2 + MC^2$ theo m.

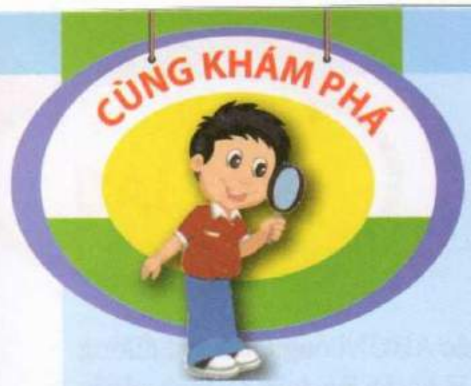
7. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ đường cao AH. Gọi E và D lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Cho biết HD = 18 cm, HE = 12 cm. Tìm các độ dài AB, AC.

8. Một tam giác vuông có cạnh huyền là 6,15 cm và đường cao tương ứng là 3 cm. Tìm các cạnh góc vuông của tam giác.

9. Cạnh huyền của một tam giác vuông lớn hơn một cạnh góc vuông của tam giác là 9 cm, còn tổng hai cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền là 6 cm. Tính chu vi và diện tích tam giác vuông đó.

10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm D di động trên cạnh AC. Đường thẳng d vuông góc với AC tại C cắt đường BD tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên cạnh AC thì tổng $\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BE^2}$ không đổi.





CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY BẰNG HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong đại số, ta có bất đẳng thức Cauchy được phát biểu như sau :

Cho hai số dương a và b, ta luôn có : $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a = b$.

Các em có thể dùng các hệ thức vừa học để chứng minh bất đẳng thức nổi tiếng này.

– Trên một đường thẳng lấy theo thứ tự ba điểm A, H, B sao cho $HA = a$, $HB = b$.

– Vẽ nửa đường tròn tâm O có đường kính AB.

Đường tròn này có bán kính $R = OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

– Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tại C.

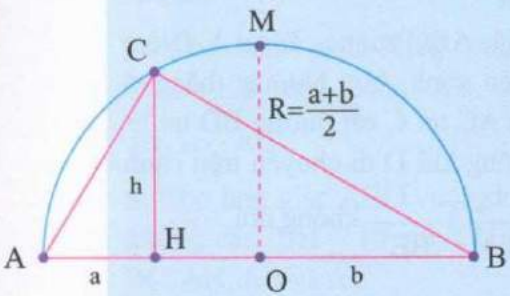
Ta có $OA = OB = OC$ nên tam giác ABC vuông tại C. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có :

$$HC^2 = HA.HB.$$

Suy ra $h = HC = \sqrt{HA.HB} = \sqrt{a.b}$.

Trong nửa đường tròn, ta luôn có :

$$OC \geq HC \Rightarrow R \geq h \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}.$$



Dấu bằng chỉ xảy ra khi : $H \equiv O \Leftrightarrow a = b$.

Vậy ta đã chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng cách vận dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Lưu ý :

$\dfrac{a+b}{2}$ được gọi là **trung bình cộng** của hai số a, b ;

$\sqrt{a.b}$ được gọi là **trung bình nhân** của hai số dương a, b.

Như vậy :

– Hệ thức lượng vừa dùng trong chứng minh trên có thể được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông đường cao ứng với cạnh huyền luôn bằng trung bình nhân hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

– Bất đẳng thức Cauchy có thể được phát biểu như sau :

Trung bình cộng hai số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của hai số đó. Dấu bằng chỉ xảy ra khi hai số đó bằng nhau.

Ta thấy ĐẠI SỐ và HÌNH HỌC là hai người bạn tốt luôn hỗ trợ cho nhau trong việc học toán phải không các em !

CHỦ ĐỀ 2

TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

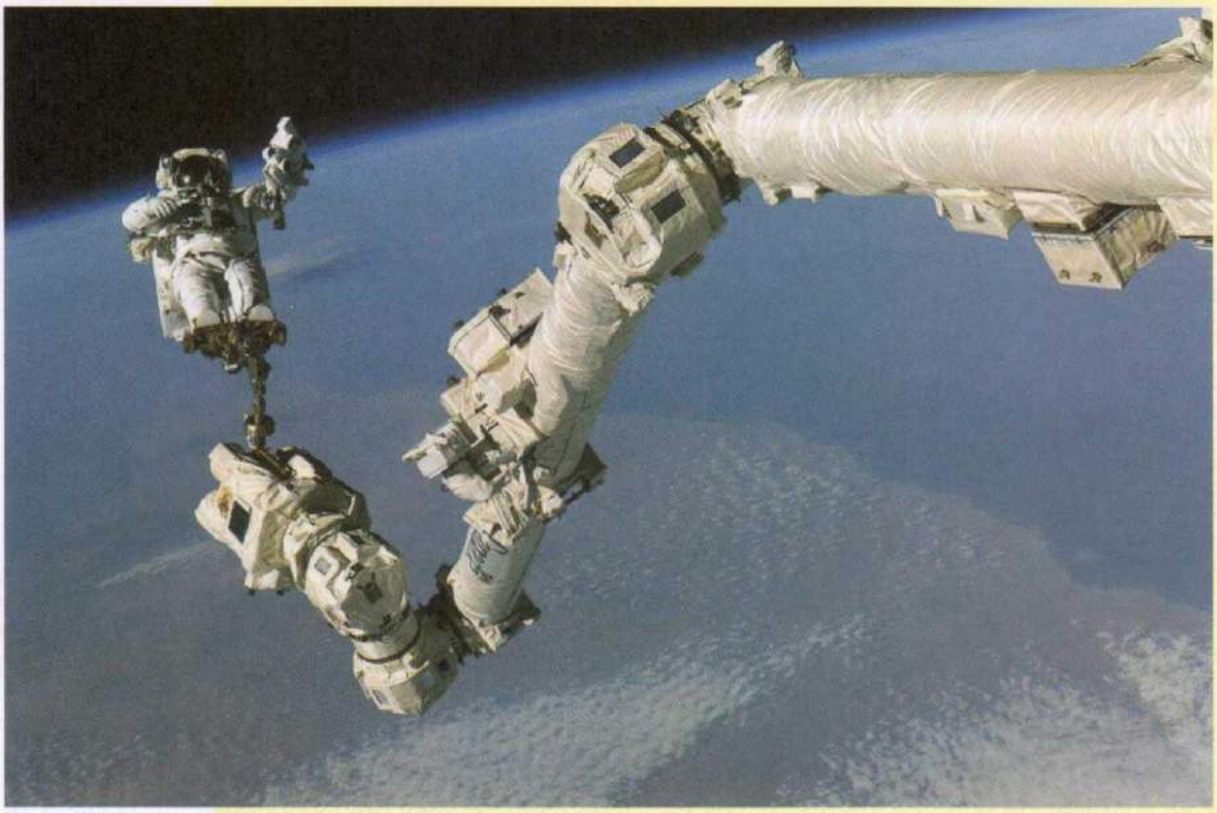
Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của một góc

Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt

Tìm tỉ số lượng giác bằng máy tính cầm tay

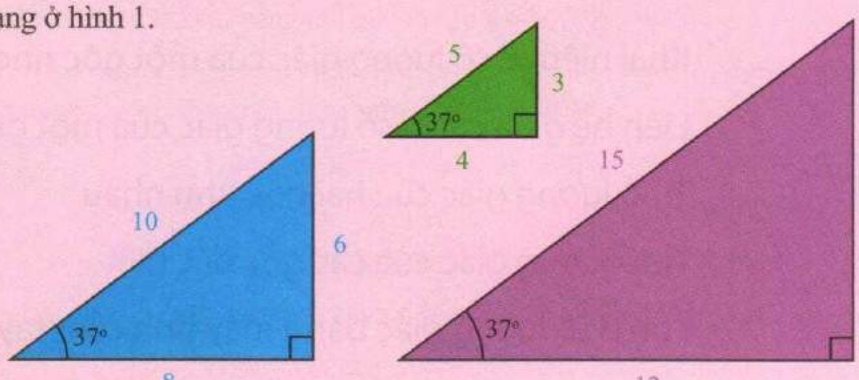


Cánh tay robot trên trạm không gian ISS được vận hành bằng cách điều khiển độ lớn của các góc tại các khớp. Để tính toán được vị trí của nhà du hành vũ trụ, cần phải tính được tỉ số lượng giác của những góc đó.

1. KHÁI NIỆM TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

Hoạt động 1

So sánh tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc 37° trong các tam giác vuông đồng dạng ở hình 1.



Hình 1

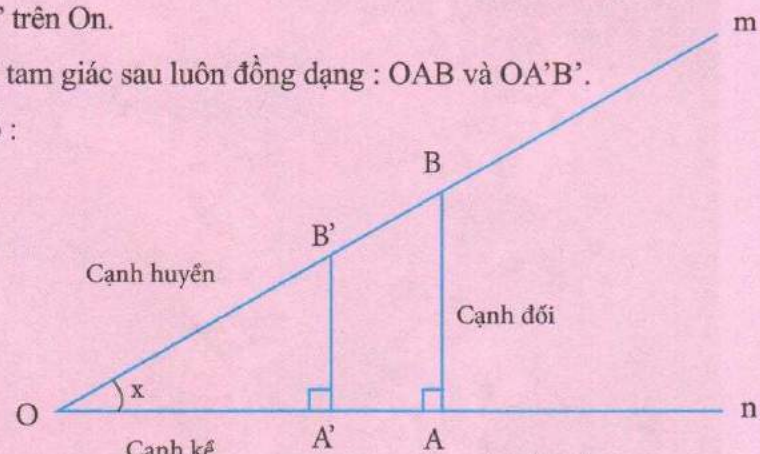
Hoạt động 2

Vẽ góc nhọn $\widehat{mOn} = x$. Lấy hai điểm B và B' trên Om. Gọi A và A' là hình chiếu vuông góc của B và B' trên On.

– Hãy chứng minh hai tam giác sau luôn đồng dạng : OAB và OA'B'.

– So sánh các cặp tỉ số :

- $\dfrac{AB}{OA}$; $\dfrac{A'B'}{OA'}$
- $\dfrac{AB}{OB}$; $\dfrac{A'B'}{OB'}$
- $\dfrac{OA}{OB}$; $\dfrac{OA'}{OB'}$



Hình 2

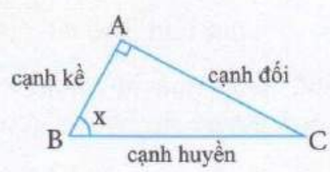
Ta nhận thấy :

Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề (hoặc tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối, cạnh đối và cạnh huyền, cạnh kề và cạnh huyền) của một góc nhọn trong tam giác vuông đặc trưng cho độ lớn của góc nhọn đó. Các tỉ số này chỉ thay đổi khi độ lớn của góc nhọn đang xét thay đổi và ta gọi chúng là các *tỉ số lượng giác* của góc nhọn đó.

Định nghĩa

Cho góc nhọn x. Vẽ một tam giác ABC vuông tại A có góc nhọn ABC bằng x.

Xác định cạnh đối và cạnh kề của góc x : AC là cạnh đối, AB là cạnh kề, BC là cạnh huyền.



Hình 3

Khi đó :

– *Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là* **sin** *của góc* x, *kí hiệu* sinx.

– *Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là* **côsin** *của góc* x, *kí hiệu* cosx.

– *Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là* **tang** *của góc* x, *kí hiệu* tanx.

– *Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là* **côtang** *của góc* x, *kí hiệu* cotx.

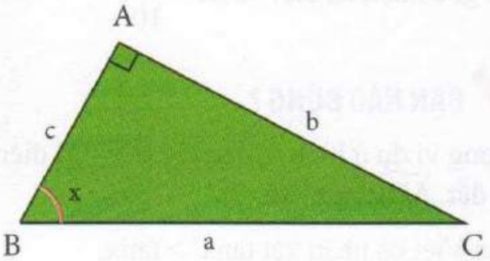
Cụ thể đối với tam giác vuông ABC trong hình 4, ta có :

$$\sin x = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a};$$

$$\cos x = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a};$$

$$\tan x = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c};$$

$$\cot x = \frac{\text{kề}}{\text{đối}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$



Hình 4

Ví dụ : Tính tỉ số lượng giác của góc 37° dựa theo độ dài các cạnh của các tam giác vuông đã cho trong hình 1.

Giải :

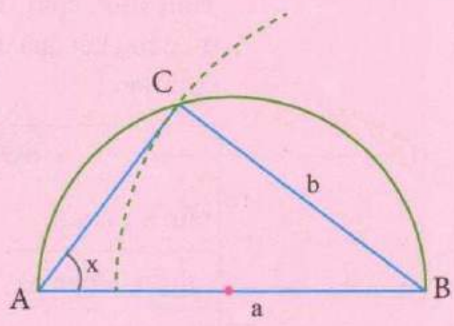
$$\sin 37^\circ = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\ ;\ \cos 37^\circ = \frac{12}{15} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\ ;$$

$$\tan 37^\circ = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\ ;\ \cot 37^\circ = \frac{12}{9} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Hoạt động 3

Cho trước tỉ số $\frac{b}{a}$ (b < a). Hùng vẽ nửa đường tròn đường kính AB = a cm rồi vẽ đường tròn tâm B bán kính b cm cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C (h.5).

Đặt $\widehat{CAB} = x$, hãy tính sinx.



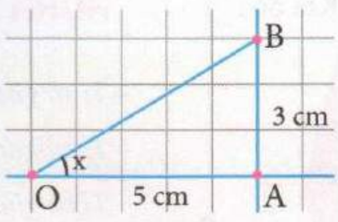
Hình 5

Ta nhận thấy :

– Cho góc nhọn x, ta tính được các tỉ số lượng giác của nó.

– Ngược lại, cho một trong các tỉ số lượng giác của góc nhọn x, ta có thể vẽ được góc đó.

Ví dụ : Vẽ góc nhọn x, biết $\tan x = \dfrac{3}{5}$.



Hình 6

Giải :

Trên một đường thẳng, vẽ đoạn OA = 5 cm. Trên đường thẳng vuông góc với OA tại A, vẽ đoạn AB = 3 cm. Đặt $\widehat{AOB} = x$.

Ta có $\tan x = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{3}{5}$. Vậy x là góc nhọn cần vẽ.

THỬ TÀI BẠN

Vẽ góc nhọn α, biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{10}$.

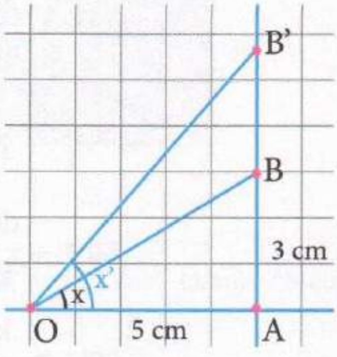
BẠN NÀO ĐÚNG ?

Trong ví dụ ở hình 6, nếu lấy trên AB điểm B' với AB' > AB và đặt $\widehat{AOB'} = x'$ (h. 7).

Bạn Việt có nhận xét tanx' > tanx.

Bạn Nam có nhận xét cotx' < cotx.

Theo em, bạn nào đúng ?



Hình 7

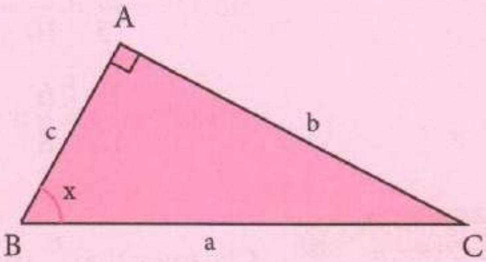
2. LIÊN HỆ GIỮA CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

Hoạt động 4

Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c như hình 8.

Đặt $\widehat{ABC} = x$.

Tính sinx, cosx, tanx, cotx theo a, b, c rồi dùng kết quả đó để điền vào bảng so sánh sau :



Hình 8

SO SÁNH		GHI KẾT QUẢ
$\sin x$; $\cos x$	0 ; 1	*Ví dụ :* $0 < \sin x < 1$
$\sin^2 x + \cos^2 x$	1	
$\tan x$	$\dfrac{\sin x}{\cos x}$	
$\cot x$	$\dfrac{\cos x}{\sin x}$	
$\tan x.\cot x$	1	

Cho góc nhọn x, ta luôn có :

$$0 < \sin x < 1\ ;\ 0 < \cos x < 1$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ ;\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\tan x.\cot x = 1$$

Ví dụ : Cho biết $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Tính $\cos 30^\circ, \tan 30^\circ, \cot 30^\circ$.

Giải :

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

THỬ TÀI BẠN

Cho biết $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Tính $\sin 60^\circ, \tan 60^\circ, \cot 60^\circ$.

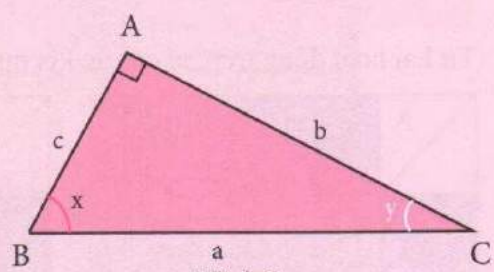
3. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

Hoạt động 5

Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c như hình 9.

Đặt $\widehat{ABC} = x\ ;\ \widehat{ACB} = y$.

Tính tỉ số lượng giác của các góc x và y theo a, b, c rồi so sánh.



Hình 9

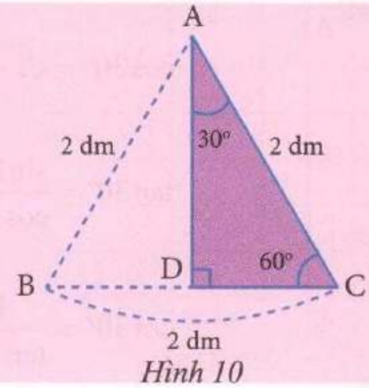
SO SÁNH		GHI KẾT QUẢ
x	$y = 90^\circ - x$	
sinx	cosy	
cosx	siny	
tanx	coty	
cotx	tany	

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$
$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$
$$\tan(90^\circ - x) = \cot x$$
$$\cot(90^\circ - x) = \tan x$$

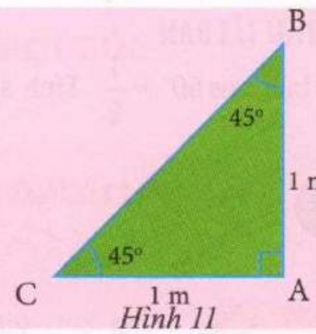
4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT

Hoạt động 6 Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 dm. Gọi D là trung điểm BC. Tính độ dài AD, CD rồi dùng kết quả đó để tính tỉ số lượng giác của các góc 30° và 60°.



Hình 10

Hoạt động 7 Cho tam giác vuông cân có cạnh bằng 1 m. Tính độ dài cạnh huyền rồi dùng kết quả đó để tính các tỉ số lượng giác của góc 45°.

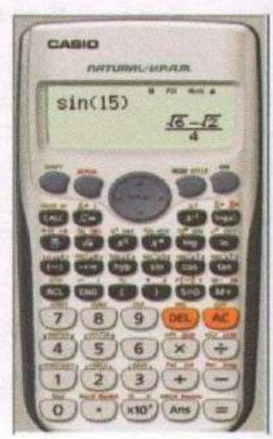


Hình 11

Từ hai hoạt động trên, ta có các kết quả sau :

x	30°	45°	60°
sinx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

x	30°	45°	60°
tanx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotx	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



5. TÌM TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Để tìm các tỉ số lượng giác một cách nhanh chóng, ta có thể dùng máy tính cầm tay, chẳng hạn máy tính CASIO *fx-570VN PLUS*. Ta sẽ học cách sử dụng hai chức năng sau của máy :

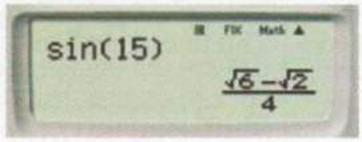
– Tính các tỉ số lượng giác của các góc nhọn.

– Tính số đo của một góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của nó.

Trong chương trình Trung học cơ sở, ta chỉ học số đo góc là độ, phút, giây nên sau khi bật máy (nhấn nút ON) ta chọn kiểu độ (Mode degree) bằng cách nhấn liên tiếp các nút SHIFT MODE 3. Khi đó, ở phía trên của màn hình xuất hiện chữ DEG.

• Để tìm tỉ số lượng giác của một góc x, ta sẽ dùng các nút : 

Ví dụ : Để tính sin15° ta bấm các nút : [sin] [1] [5] [)] [=].

Kết quả trên màn hình sẽ là : 

Vậy $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Còn nếu muốn tính gần đúng thì bấm thêm : [Shift] [=] hoặc bấm nút [S⇔D]:

Ta sẽ được : $\sin 15^\circ \approx 0,2588190451$.

Bảng tóm tắt cách tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn :

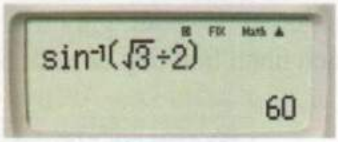
Muốn tính	Thứ tự các nút bấm
sinx	[sin] [x] [)] [=]
cosx	[cos] [x] [)] [=]
tanx	[tan] [x] [)] [=]
cotx	[1] [÷] [tan] [x] [)] [=]

Ví dụ : Tính sin, côsin, tang, côtang của góc 30°.

Lưu ý : Để tính cotx ta bấm 1: tanx vì $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

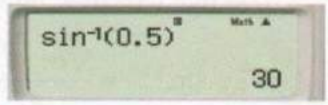
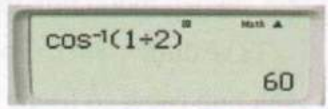
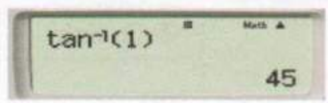
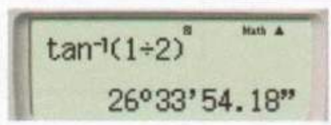
• Để tính số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của nó, ta dùng nút Shift và các nút

Ví dụ : Để tìm góc nhọn có sin bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta bấm như sau :



Vậy $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60^o$.

Bảng tóm tắt cách tính số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của nó :

Muốn tìm góc nhọn x có	Thứ tự các nút bấm	Ví dụ thực tế trên màn hình
sinx = k	shift sin k) =	
cosx = k	shift cos k) =	
tanx = k	shift tan k) =	
cotx = k	shift tan 1 ÷ k) = o,,,	

Lưu ý : Để tính số đo góc tới độ, phút, giây, ta bấm nút 

Ví dụ : Dùng máy tính cầm tay tính các giá trị sau :

a) $\sin 35^o$; $\cos 14^o$; $\tan 43^o$; $\cot 64^o$ (làm tròn đến 3 chữ số thập phân).

b) Góc x trong mỗi trường hợp sau (làm tròn đến phút) : sinx = 0,345 ; tanx = 1,528.

Giải : a) $\sin 35^o \approx 0{,}574$; $\cos 14^o \approx 0{,}970$; $\tan 43^o \approx 0{,}933$; $\cot 64^o \approx 0{,}488$.

b) $\sin x = 0{,}345 \Rightarrow x \approx 20^o11'$; $\tan x = 1{,}528 \Rightarrow x \approx 56^o48'$.

THỬ TÀI BẠN

Dùng máy tính cầm tay tính :

a) $\sin 76^o$; $\cos 31^o$; $\tan 83^o$; $\cot 88^o$ (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

b) Góc y trong mỗi trường hợp sau (làm tròn đến độ) : cosy = 0,79 ; coty = 2,44.

BẠN NÀO ĐÚNG ?

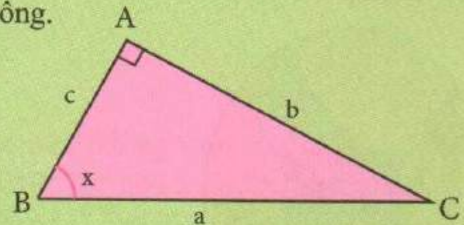
Dùng máy tính cầm tay để tìm góc nhọn x, biết sin x = 0,650.

Bạn Lan tìm được kết quả $x = 40{,}542^o$.

Bạn Cúc tìm được $x = 40^o32'30''$.

Theo em, bạn nào đúng ?

1. Cho x là số đo một góc nhọn trong một tam giác vuông.



– Tỉ số giữa cạnh đối của góc x và cạnh huyền được gọi là sin của góc x, kí hiệu sinx.
– Tỉ số giữa cạnh kề của góc x và cạnh huyền được gọi là côsin của góc x, kí hiệu cosx.
– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc x, kí hiệu tanx.
– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc x, kí hiệu cotx.

$$\sin x = \frac{b}{a};\ \cos x = \frac{c}{a};\ \tan x = \frac{b}{c};\ \cot x = \frac{c}{b}.$$

2. Cho góc nhọn x, ta tính được các tỉ số lượng giác của nó. Ngược lại, cho một trong các tỉ số lượng giác của góc nhọn x, ta có thể vẽ được góc đó.

3. Các tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn luôn dương. Hơn nữa, ta có :

$$0 < \sin x < 1;\ 0 < \cos x < 1$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x};\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\tan x.\cot x = 1$$

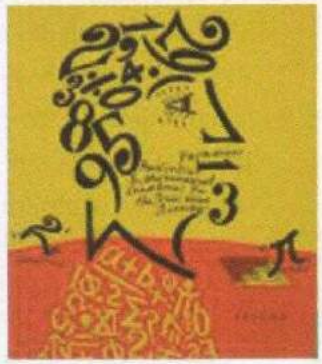
4. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$
$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$
$$\tan(90^\circ - x) = \cot x$$
$$\cot(90^\circ - x) = \tan x$$

5. Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt

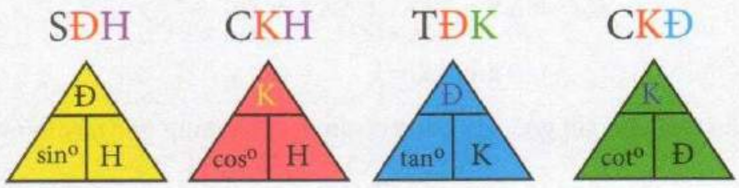
x / Tỉ số lượng giác	30°	45°	60°
sinx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tanx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotx	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

TOÁN HỌC VÀ THƠ VĂN



Bạn Lan đã dùng bài thơ sau đây để nhớ cách tính tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác vuông.

Sin đi học, cứ khóc hoài, thôi đừng khóc, có kẹo đây



Bạn Hùng lại tìm được bài thơ sau đây :

Tìm sin lấy đối chia huyền
Côsin ta lấy kề huyền chia nhau
Còn tang ta hãy tính sau
Đối trên kề dưới chia nhau ra liền.

Em hãy giải thích tại sao các câu thơ trên lại giúp được hai bạn Lan và Hùng nhé.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B trong các trường hợp sau :

a) BC = 5 cm ; AB = 3 cm ;

b) BC = 13 cm ; AC = 12 cm ;

c) BC = $5\sqrt{2}$ cm ; AB = 5 cm ;

d) AB = $a\sqrt{3}$; AC = a.

2. Cho biết sinx = 0,8.

a) Hãy vẽ một góc nhọn có số đo bằng x.

b) Tính cosx, tanx, cotx.

3. Cho biết sinx = $\frac{1}{2}$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc $(90^\circ - x)$.

4. Cho biết sinx = $\frac{1}{3}$. Tính cosx, tanx, cotx.

5. Cho biết tanx = 3. Tính cotx, sinx, cosx.

6. Dùng máy tính cầm tay tìm tỉ số lượng giác của các góc sau :

a) 15° ; 52° ; 64° ;

b) $15^\circ20'$; $52^\circ18'$; $64^\circ24'$.

7. Tính góc x xác định bởi :

a) sinx = 0,174 ; b) sinx = 0,519 ;

c) cosx = 0,342 ; d) tanx = 1,254 ;

e) cotx = 0,856.

8. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 10 cm, AC = 15 cm.

a) Tính góc B.

b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI.

c) Vẽ AH vuông góc với BI tại H. Tính AH.

9. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB = 2R. Vẽ bán kính OC vuông góc với AB, gọi M là một điểm nằm trên OC sao cho $\tan\widehat{OAM} = \frac{3}{4}$, AM cắt nửa đường tròn tại D. Tính các đoạn AM, AD, BD theo R.

10. Vẽ một tam giác vuông có một góc bằng 58°.

a) Đo độ dài các cạnh rồi tính các tỉ số lượng giác của góc 58°.

b) Kiểm tra lại bằng máy tính cầm tay.

11. Cho tam giác ABC vuông tại C, cho biết AC = 18 cm và BC = 24 cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

12. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° : $\sin60^\circ$, $\cos75^\circ$, $\sin52^\circ30'$, $\cot82^\circ$, $\tan80^\circ$.

13. Vẽ góc nhọn x trong mỗi trường hợp sau đây :

a) sinx = $\frac{2}{3}$; b) cosx = 0,6 ;

c) tanx = $\frac{3}{4}$; d) cotx = $\frac{3}{2}$.

14. Cho tam giác vuông có một góc bằng 60° và cạnh huyền có độ dài bằng 8 cm. Hãy tìm độ dài của các cạnh góc vuông.

15. Cho tam giác ABC, vẽ đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Cho biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, BH = 20 cm, HC = 21 cm. Tính AC.

LUYỆN TẬP

1. Dùng máy tính cầm tay để tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) :

a) $\sin 40^\circ 12'$; b) $\cos 52^\circ 54'$;

c) $\tan 63^\circ 36'$; d) $\cot 25^\circ 18'$.

2. Dùng máy tính cầm tay để tìm số đo của góc x (làm tròn đến phút) trong mỗi trường hợp sau :

a) $\sin x = 0{,}2368$; b) $\cos x = 0{,}6224$;

c) $\tan x = 2{,}154$; d) $\cot x = 3{,}251$.

3. Tính :

a) $\dfrac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$; b) $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ$.

4. So sánh các cặp tỉ số lượng giác sau :

a) $\sin 30^\circ$ và $\sin 50^\circ$; b) $\cos 22^\circ$ và $\cos 78^\circ$;

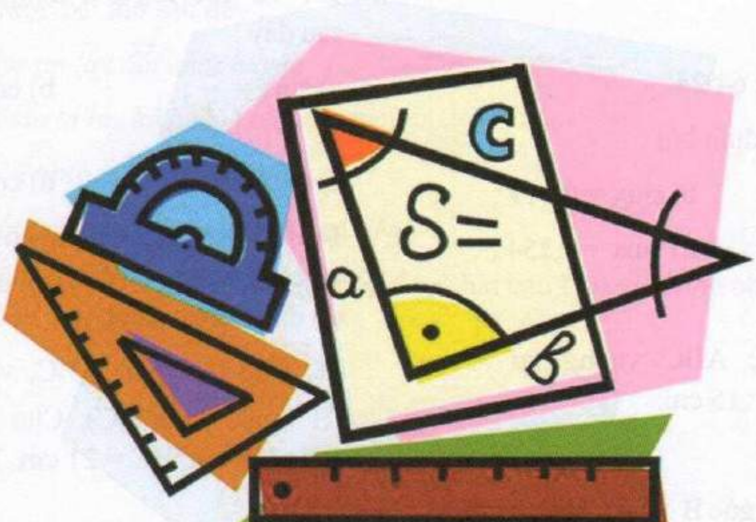
c) $\tan 52^\circ$ và $\tan 88^\circ$; d) $\cot 14^\circ$ và $\cot 49^\circ$;

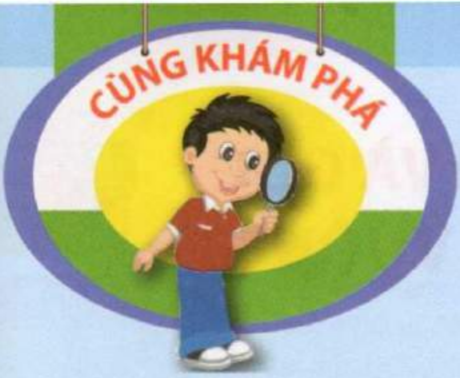
e) $\sin 32^\circ$ và $\cos 32^\circ$.

5. Dùng máy tính cầm tay để tính giá trị rồi so sánh các cặp tỉ số lượng giác sau :

a) $\tan 25^\circ$ và $\sin 25^\circ$; b) $\tan 45^\circ$ và $\cos 45^\circ$;

c) $\cot 32^\circ$ và $\cos 32^\circ$; d) $\cot 60^\circ$ và $\sin 30^\circ$.





LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Ý nghĩa từ Trigonometry, nguồn gốc môn Lượng giác

Vào khoảng năm 140 trước Công nguyên, nhà toán học Hi Lạp Hipparchus đã biên soạn bảng các tỉ số lượng giác để đo đạc tam giác.

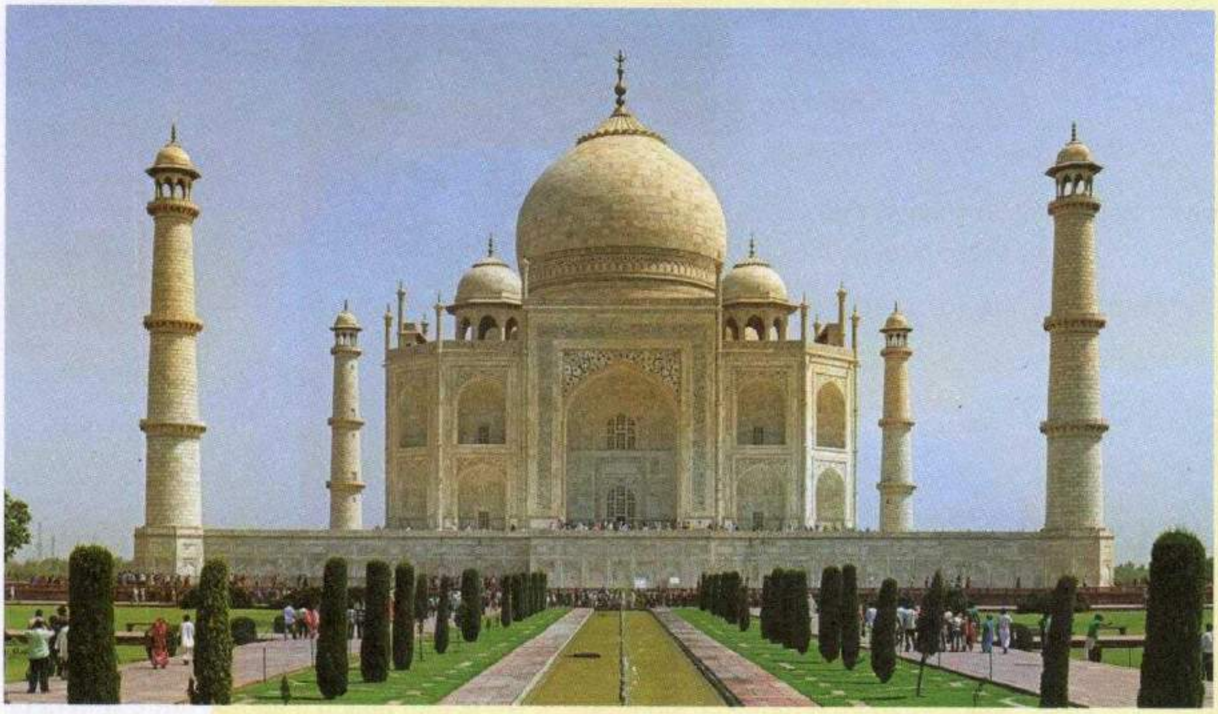
Lượng giác, tiếng Anh là Trigonometry (từ tiếng Hi Lạp trigōnon nghĩa là "tam giác" và metron nghĩa là "đo lường"). Nó là một nhánh toán học được sinh ra từ thế kỉ 3 trước Công nguyên. Ban đầu, nó là nhánh của hình học và được dùng chủ yếu để nghiên cứu thiên văn và tìm hiểu về hình tam giác và sự liên hệ giữa cạnh và góc của nó. Ngày nay, có rất nhiều ứng dụng của lượng giác, ví dụ như phép đo đạc tam giác được sử dụng trong thiên văn để đo khoảng cách tới các ngôi sao, trong địa lí để đo khoảng cách giữa các mốc giới. Các lĩnh vực khác có sử dụng lượng giác còn có : hàng hải, hàng không và trong vũ trụ, lí thuyết âm nhạc, âm học, quang học, điện tử, sinh học, chiếu chụp y học (các loại chụp cắt lớp và siêu âm), dược khoa, hoá học, lí thuyết số (và vì thế là mật mã học), địa chấn học, khí tượng học, hải dương học, đồ hoạ máy tính, bản đồ học, tinh thể học, v.v.

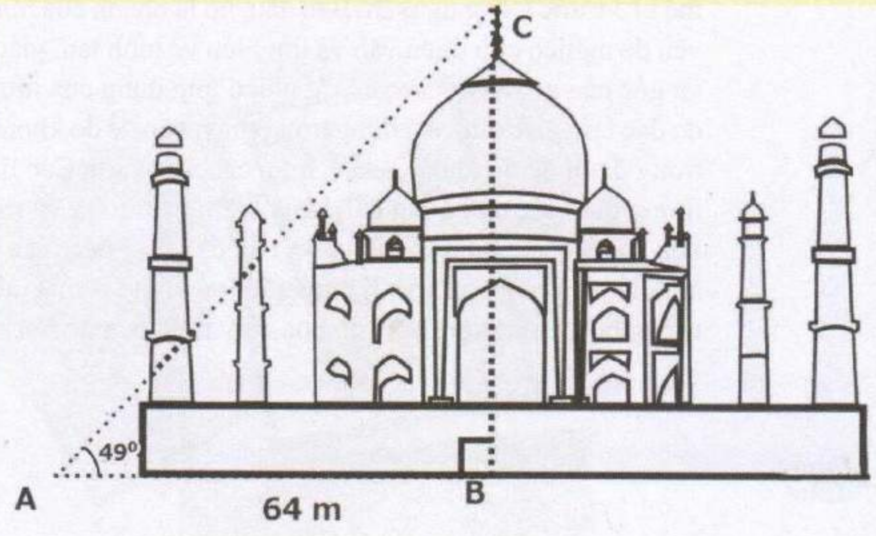
CHỦ ĐỀ 3

HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Giải tam giác vuông



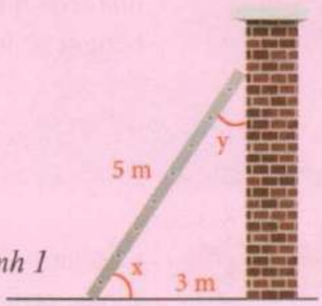


Có thể tính chiều cao BC khi biết khoảng cách AB và một tỉ số lượng giác của góc nhọn A được không ?

1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Hoạt động 1

Một cái thang dài 5 m đang dựa vào một bức tường thẳng đứng, chân thang cách tường 3 m (h. 1). Tính sin và côsin của các góc x, y hợp bởi thang lần lượt với mặt đất và với mặt tường.

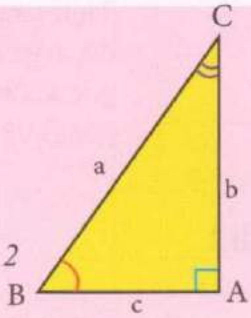


Hình 1

Hoạt động 2

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (h. 2).

Tính sin và côsin của các góc B và C theo a, b, c. Từ đó, hãy tính mỗi cạnh góc vuông b, c theo cạnh huyền a và các tỉ số lượng giác của góc B và góc C.



Hình 2

Định lí 1

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

Cụ thể đối với tam giác vuông ở hình 2, ta có :

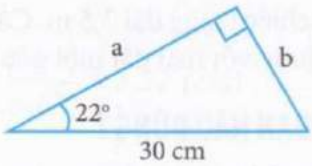
$b = a.\sin B = a.\cos C$;

$c = a.\sin C = a.\cos B$.

Ví dụ : Tính hai cạnh a, b của tam giác vuông có cạnh huyền dài 30 cm và một góc nhọn bằng 22° (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Giải : $a = 30.\cos 22^\circ \approx 30.0,927 = 27,81$ (cm) ;

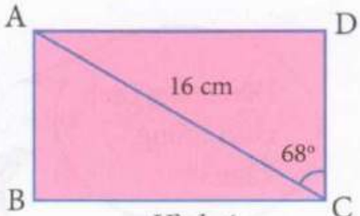
$b = 30.\sin 22^\circ \approx 30.0,375 = 11,25$ (cm).



Hình 3

THỬ TÀI BẠN

Tính hai cạnh của một hình chữ nhật khi biết một đường chéo dài 16 cm và góc giữa đường chéo và một cạnh bằng 68° (h. 4) (làm tròn đến hai chữ số thập phân).



Hình 4

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho tam giác AOB vuông tại O có AB = a và góc A = 23°. Tính độ dài cạnh OA.

Kết quả của hai bạn Mai và Lan lần lượt là :

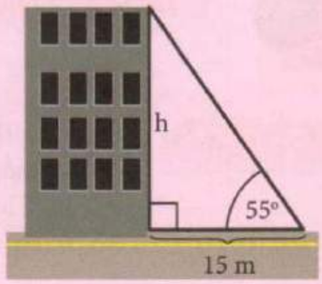
Mai : $OA = a.\sin 23^\circ$.

Lan : $OA = a.\cos 67^\circ$.

Theo em, bạn nào đúng ?

Hoạt động 3

Một toà nhà có chiều cao h (m). Khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 55° thì bóng của toà nhà trên mặt đất có chiều dài 15 m. Tỉ số $\frac{h}{15}$ bằng tỉ số lượng giác nào của góc 55° ?

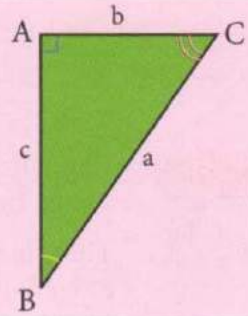


Hình 5

Hoạt động 4

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (h. 6).

Tính tang và côtang của các góc B và C. Từ đó, hãy tính mỗi cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông còn lại và các tỉ số lượng giác của góc B và góc C.



Hình 6

Định lí 2

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

Cụ thể đối với tam giác vuông ở hình 6, ta có :

$$b = c.\tan B = c.\cot C \;;\; c = b.\tan C = b.\cot B.$$

Ví dụ : Tính chiều cao của toà nhà trong hoạt động 3.

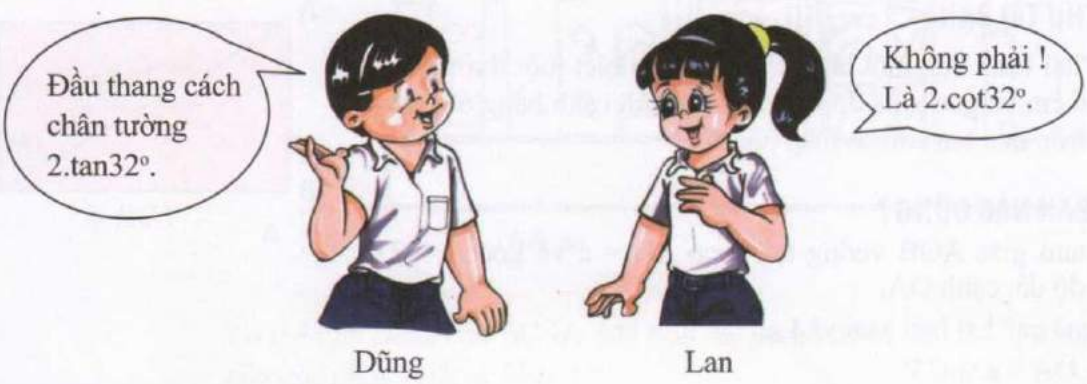
Giải : $h = 15.\tan 55^\circ \approx 21{,}42$ (m).

THỬ TÀI BẠN

Một chiếc thang dài 3,5 m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc 60° ?

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Dũng và Lan cùng dựng một cái thang hợp với tường một góc 32°. Chân thang cách chân tường 2 m.

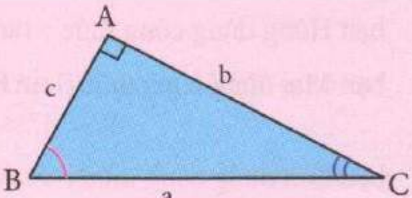


Theo em, bạn nào đúng ?

2. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Hoạt động 5

Em hãy cho biết trong các trường hợp nào sau đây thì bạn Hùng tìm được tất cả các cạnh và các góc của tam giác ABC vuông tại A (h.7). Điền giá trị thích hợp vào ô trống.



Hình 7

Trường hợp	a	b	c	B	C
1	10	4			
2	10		5		
3	10				
4	16			35°	
5		24			28°

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

Ví dụ : Giải tam giác ABC vuông tại A trong mỗi trường hợp sau :

a) $b = 4$ cm, $\widehat{C} = 62^\circ$;

b) $a = 40$ cm, $\widehat{B} = 52^\circ$;

c) $c = 42$ cm, $b = 36$ cm.

Giải : a) $c = b.\tan C = 4.\tan 62^\circ \approx 7,52$ (cm) ; $a = \dfrac{b}{\cos C} = \dfrac{4}{\cos 62^\circ} \approx 8,52$ (cm) ;

$\widehat{B} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$.

b) $b = a.\sin B = 40.\sin 52^\circ \approx 31,52$ (cm) ; $c = a.\cos B = 40.\cos 52^\circ \approx 24,63$ (cm) ;

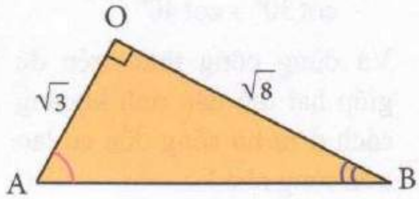
$\widehat{C} = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$.

c) $\tan C = \dfrac{c}{b} = \dfrac{42}{36} = \dfrac{7}{6} \Rightarrow \widehat{C} \approx 49^\circ 24'$; $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} \approx 90^\circ - 49^\circ 24' = 40^\circ 36'$;

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{42^2 + 36^2} = 6\sqrt{85}$ (cm).

THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác OAB vuông tại O có $OA = \sqrt{3}$ cm ; $OB = \sqrt{8}$ cm. Hãy giải tam giác vuông OAB.



Hình 8

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Để tính góc B của tam giác OAB vuông tại O khi đã biết OA = a ; OB = b,

bạn Hùng dùng công thức : $\tan B = \frac{a}{b}$;

bạn Mai dùng công thức : $\sin B = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

bạn Lan dùng công thức : $\cos B = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Theo em, bạn nào đúng ?

GHI NHỚ

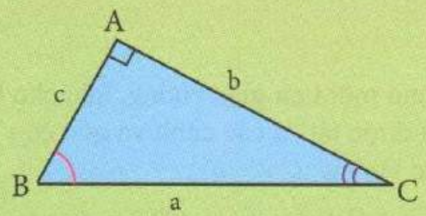
1. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.
2. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.
3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ABC.

$b = a.\sin B = a.\cos C$;

$b = c.\tan B = c.\cot C$;

$c = a.\sin C = a.\cos B$;

$c = b.\tan C = b.\cot B$.



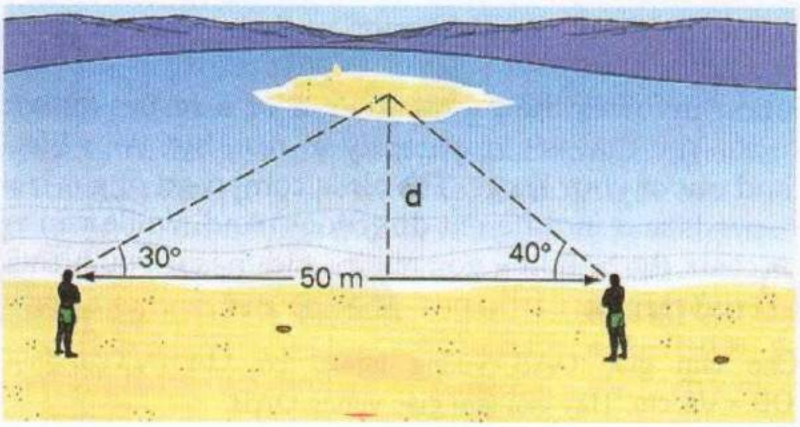
4. Tìm tất cả các cạnh và góc còn lại của một tam giác vuông khi biết các yếu tố đủ để xác định nó gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".
5. Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó.

THƯ GIÃN

Em hãy dùng hệ thức giữa cạnh và góc của tam giác vuông để giải thích công thức

$$d = \frac{50}{\cot 30^\circ + \cot 40^\circ} \text{(m)}.$$

Và dùng công thức trên để giúp hai thổ dân tính khoảng cách d từ bờ sông đến cù lao trên sông nhé !



BÀI TẬP

Trong kết quả của các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta làm tròn đến phút (với số đo góc) và đến chữ số thập phân thứ hai (với số đo độ dài).

1. Cho tam giác vuông PQR với các cạnh góc vuông PQ = 10 cm, PR = 16 cm. Hãy giải tam giác vuông PQR.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 54^\circ$, BC = 20 cm. Hãy giải tam giác vuông ABC.

3. Cho tam giác LMN vuông tại L có $\widehat{M} = 39^\circ$, LM = 14 cm. Hãy giải tam giác vuông LMN.

4. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng :

a) b = 8 cm, $\widehat{C} = 60^\circ$;

b) c = 12 cm, $\widehat{C} = 30^\circ$;

c) a = 12 cm, $\widehat{C} = 45^\circ$;

d) a = 10 cm, $\widehat{B} = 55^\circ$;

e) c = 42 cm, b = 36 cm.

5. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng AB = a, AC = $\frac{a}{2}$.

6. Giải tam giác OMN vuông tại O, biết rằng OM = a, MN = $a\sqrt{2}$.

7. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 20 cm, $\widehat{ABC} = 22^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC.

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

c) Tính các cạnh và các góc còn lại của tam giác ABC.

8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đường cao AH (H thuộc cạnh BC).

a) Tính AH theo cạnh AB và sinB.

b) Tính diện tích tam giác ABC theo AB, BC và sinB.

9. Một cột đèn cao 8 m. Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất lúc nó có bóng trên mặt đất dài 5 m.

10. Một cái thang dài 4 m đang dựa vào tường, chân thang cách chân tường 2 m. Tính góc tạo bởi thang với mặt đất và với mặt tường.

LUYỆN TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 6 cm ; AC = 15 cm. Tính $\widehat{B}-\widehat{C}$.

2. Tính các góc của tam giác ABC biết AB = 6 cm, AC = 4,5 cm, BC = 7,5 cm.

3. Tính hai góc nhọn của một tam giác vuông khi biết tỉ số hai cạnh góc vuông là $\frac{19}{28}$.

4. Tính hai góc nhọn của một tam giác vuông khi biết độ dài hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền là 2 cm và 18 cm.

5. Giải tam giác ABC vuông tại A khi biết độ dài hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền là 1 cm và 16 cm.

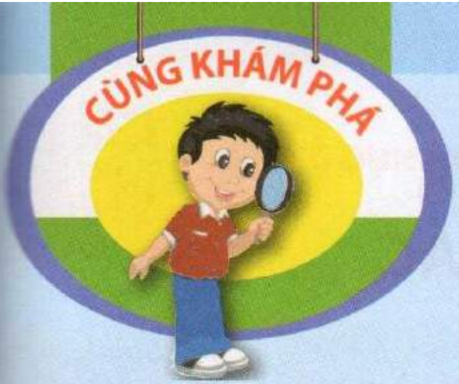
6. Tính chiều cao của một cái tháp, cho biết khi các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 42° thì bóng của tháp trên mặt đất có chiều dài 78 m.

7. Cho tứ giác lồi ABCD có AC = 16 cm, $\widehat{CBA}=\widehat{CAD}=90^\circ$, $\widehat{BCA}=\widehat{ACD}=60^\circ$. Tính các cạnh và góc của tứ giác ABCD.

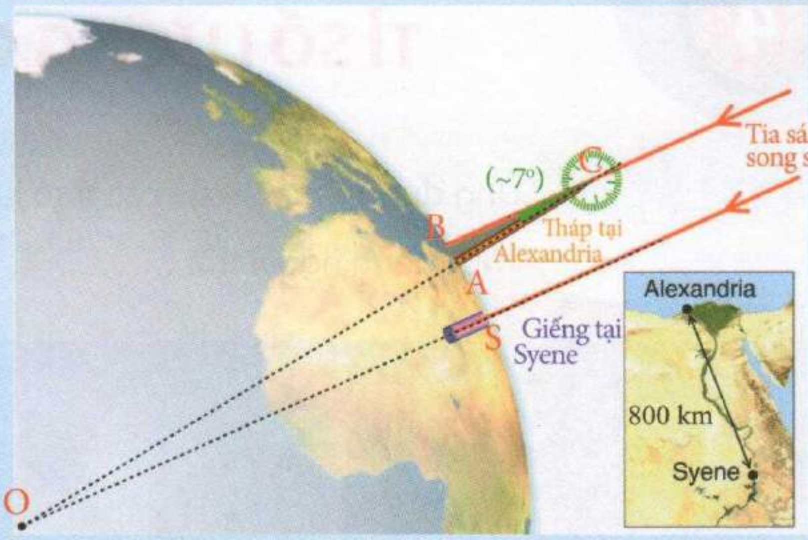
8. Tìm kích thước của một hình chữ nhật có đường chéo dài 2 m và góc giữa hai đường chéo là 60°.

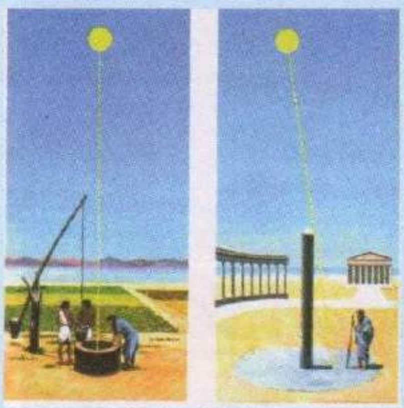
9. Cho hình thang vuông ABCD có hai đáy AB = 12 cm, DC = 16 cm, cạnh xiên AD = 8 cm. Tính các góc và cạnh góc vuông của hình thang.

10. Một hình thoi có cạnh dài 10 cm và một góc bằng 150°. Tính độ dài hai đường chéo.



GIẢI TAM GIÁC VUÔNG ĐỂ ĐO CHU VI TRÁI ĐẤT

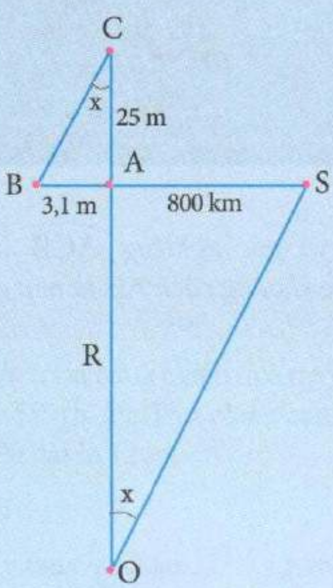




Vào khoảng năm 200 trước Công nguyên, Eratosthenes (276 – 194 TCN) đã nghĩ đến việc giải tam giác vuông để tính chu vi Trái Đất.

Ông ta quan sát thấy vào một ngày trong năm khi Mặt Trời chiếu thẳng các đáy giếng tại Syene thì cũng vào ngày đó, tại thành phố Alexandria cách Syene 800 km, một cái tháp cao 25 m có bóng trên mặt đất dài 3,1 m.

Từ nhận xét trên, Eratosthenes đã giải tam giác vuông ABC để tìm chu vi Trái Đất như sau :



Gọi A và S lần lượt là hai thành phố Alexandria và Syene, AC là chiều cao cái tháp và AB là độ dài bóng của nó. Trong tam giác vuông ABC, đặt $\widehat{ACB} = x$. Ta có :

$$\tan x = \frac{AB}{AC} = \frac{3,1}{25} = 0,124$$

$\Rightarrow x \approx 7,069^\circ$.

Do các tia sáng đến từ Mặt Trời coi như song song nên ta có CB // SO.

Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{AOS} = x$ (góc so le trong).

Khoảng cách AS = 800 km ứng với góc $x \approx 7,069^\circ$ ở tâm, còn chu vi P của Trái Đất ứng với góc 360°.

Suy ra chu vi Trái Đất là : $P = \dfrac{800.360}{7,069} \approx 40741$ (km).

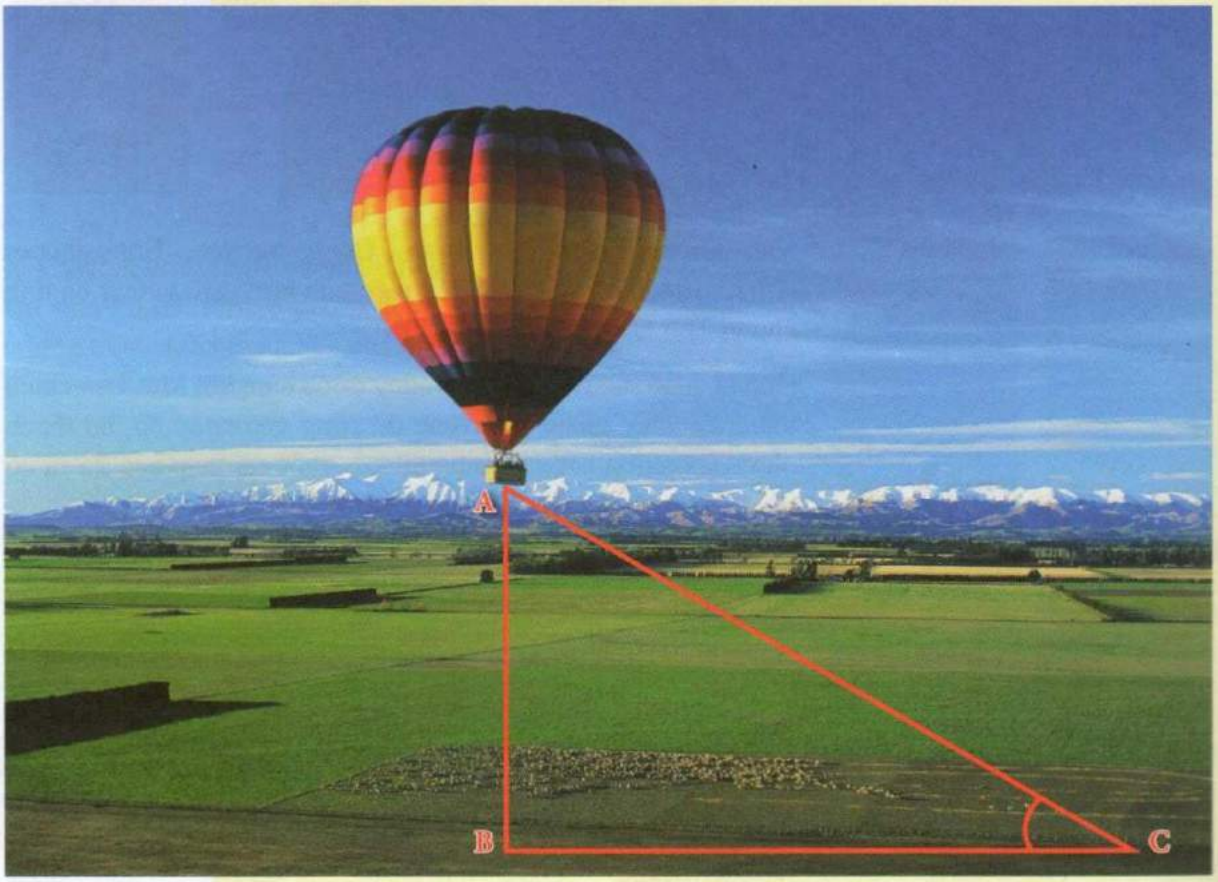
Ngày nay với máy móc hiện đại người ta đo được chu vi Trái Đất tại đường xích đạo khoảng 40075 km.

CHỦ ĐỀ 4

ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Ứng dụng thực tế của các tỉ số lượng giác

Thực hành ngoài trời



Nếu biết độ cao AB của khinh khí cầu và góc nghiêng $\widehat{ACB}$ của hướng ngắm, người quan sát có thể tính được khoảng cách AC từ mắt đến điểm ngắm.

1. ỨNG DỤNG THỰC TẾ CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Góc nghiêng lên, nghiêng xuống

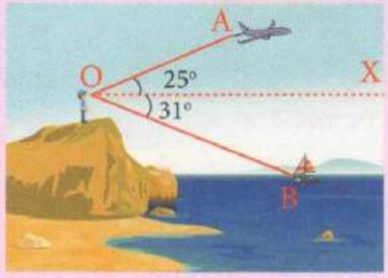
Hoạt động 1 Một người đứng tại bờ biển đặt mắt tại điểm O (h. 1) :

– Nhìn theo tia OX song song với mực nước biển.

– Nhìn một máy bay trên trời tại điểm A.

– Nhìn một chiếc thuyền tại điểm B.

Em hãy cho biết trong ba tia OX, OA, OB tia nào là tia nhìn ngang, tia nghiêng lên, tia nghiêng xuống.



Hình 1

Nếu tia OX là tia nhìn ngang, OA là tia nghiêng lên (nằm phía trên OX) và tia OB là tia nghiêng xuống (nằm phía dưới OX) thì :

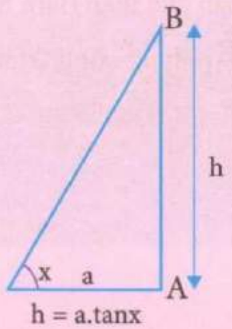
Góc $\widehat{XOA}$ gọi là **góc nâng hoặc góc nghiêng lên** nhìn từ O tới A.

Góc $\widehat{XOB}$ gọi là **góc hạ hoặc góc nghiêng xuống** nhìn từ O tới B.

Ví dụ : Trong hình 1, người quan sát nhìn thấy máy bay A với góc nâng 25°, và nhìn thấy chiếc thuyền B với góc hạ 31°.

Xác định chiều cao

Hoạt động 2 Giải thích tại sao chiều cao h = AB có thể được tính bởi công thức như trong hình 2.

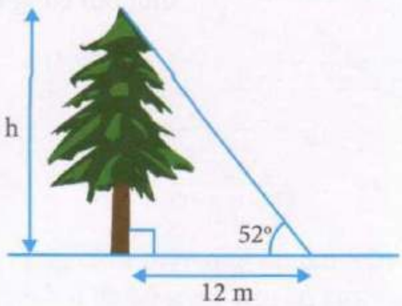


Hình 2

Ví dụ : Tia nắng chiếu qua ngọn một cái cây tạo với mặt đất một góc 52° (h. 3). Tìm chiều cao của cây khi biết bóng của nó có chiều dài là 12 m.

Giải :

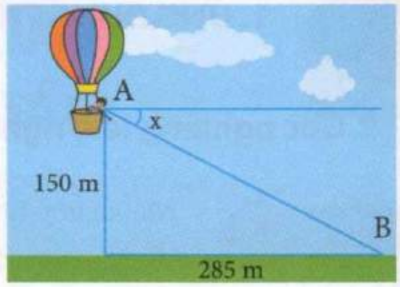
$h = a.\tan x = 12.\tan 52^\circ \approx 15,36$ (m).



Hình 3

THỬ TÀI BẠN

Một người A đang ở trên khinh khí cầu ở độ cao 150 m nhìn thấy một vật B trên mặt đất cách hình chiếu của khí cầu xuống đất một khoảng 285 m (h. 4). Tính góc hạ của tia AB. Nếu khinh khí cầu tiếp tục bay lên thẳng đứng thì khi góc hạ của tia AB là 46° thì độ cao của khinh khí cầu là bao nhiêu (làm tròn tới mét)?



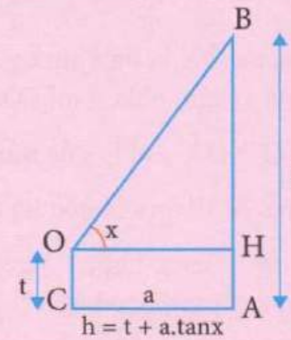
Hình 4

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Trong thử tài ở trên, khi khinh khí cầu bay càng cao, Lan nói góc hạ x càng tăng, Mai nói góc hạ x càng giảm.

Theo em, bạn nào đúng ?

Hoạt động 3 Giải thích tại sao chiều cao h = AB có thể được tính bởi công thức ghi trong hình 5.

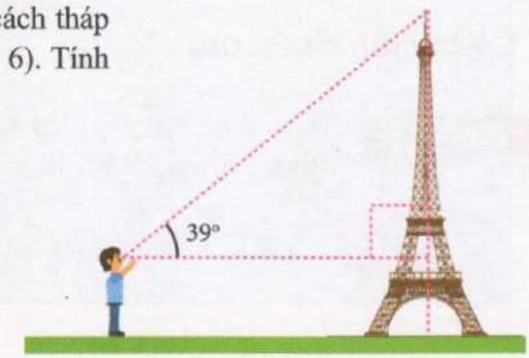


Hình 5

Ví dụ : Một người có mắt cách mặt đất 1,4 m, đứng cách tháp Eiffel 400 m nhìn thấy đỉnh tháp với góc nâng 39° (h. 6). Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

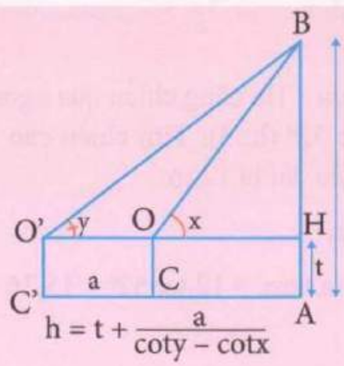
Giải : Áp dụng công thức h = t + a.tanx, ta có :

$h = 1{,}4 + 400.\tan 39^\circ \approx 325$ (m).



Hình 6

Hoạt động 4 Giải thích tại sao chiều cao h = AB có thể được tính bởi công thức ghi trong hình 7.



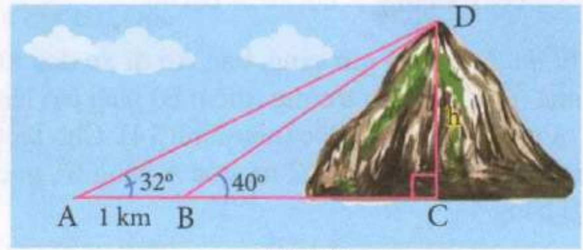
Hình 7

Ví dụ : Tính chiều cao của một ngọn núi cho biết tại hai điểm cách nhau 1 km trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh núi với góc nâng lần lượt là 40° và 32° (h. 8).

Giải :

Ta có :

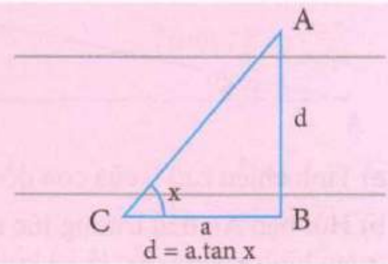
$$h = \frac{d}{\cot y - \cot x} = \frac{1000}{\cot 32^\circ - \cot 40^\circ} \approx 2447 \text{ (m)}.$$



Hình 8

◆ Xác định khoảng cách

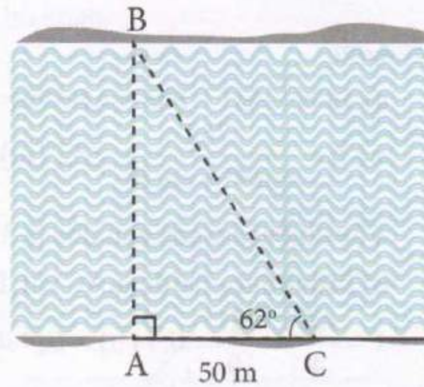
Hoạt động 5 Giải thích tại sao khoảng cách d = AB giữa hai bên bờ sông được tính bởi công thức ghi trong hình 9.



Hình 9

Ví dụ : Để đo chiều rộng AB của một con sông mà không phải băng ngang qua nó, một người đi từ A đến C đo được AC = 50 m và từ C nhìn thấy B với góc nghiêng 62° với bờ sông. Tính bề rộng của con sông.

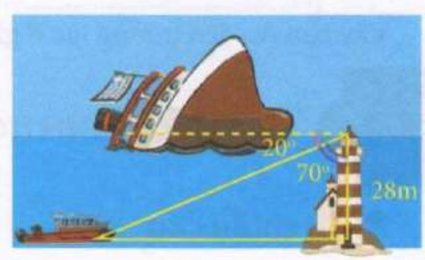
Giải : $d = a.\tan x = 50.\tan 62^\circ \approx 94$ (m).



Hình 10

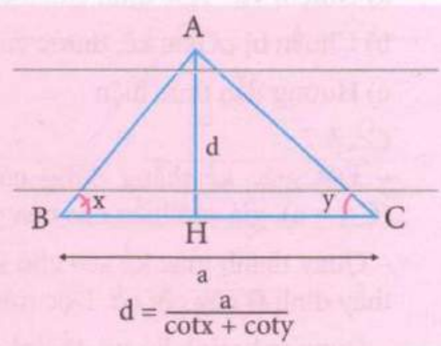
THỬ TÀI BẠN

Từ trên tháp quan sát của một ngọn hải đăng cao 28 m, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền cứu hộ với góc hạ 20° (h. 11). Tính khoảng cách từ chân tháp đến thuyền.



Hình 11

Hoạt động 6 Giải thích tại sao khoảng cách d = AH giữa hai bên bờ sông có thể được tính bởi công thức ghi trong hình 12.

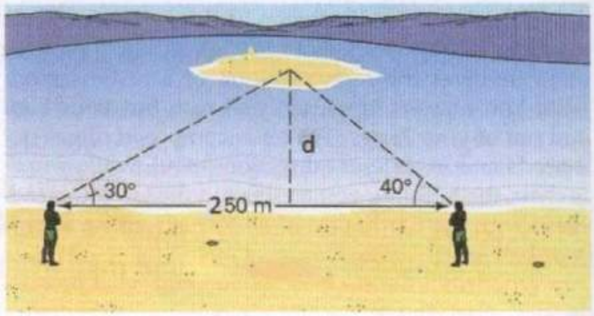


Hình 12

Ví dụ 1 : Hai ngư dân đứng ở một bên bờ sông cách nhau 250 m cùng nhìn thấy một cù lao trên sông với các góc nâng lần lượt là 30° và 40° (h. 13). Tính khoảng cách d từ bờ sông đến cù lao.

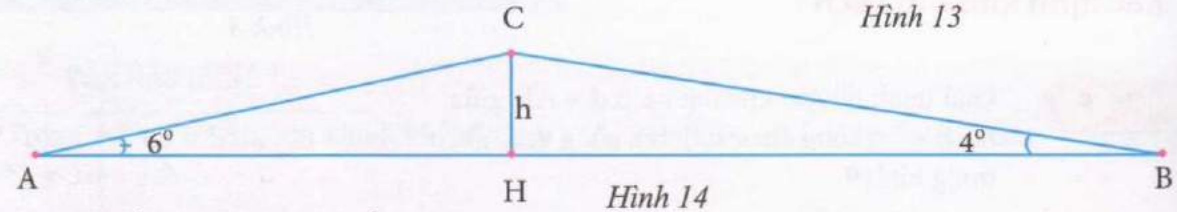
Giải :

$$d = \frac{a}{\cot x + \cot y} = \frac{250}{\cot 30^\circ + \cot 40^\circ} \approx 86 \text{ (m)}.$$



Hình 13

Ví dụ 2 : Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc (như hình 14). Cho biết đoạn thẳng AB dài 762 m, góc A bằng 6°, góc B bằng 4°.



Hình 14

a) Tính chiều cao h của con dốc.

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ ? Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là 4 km/h và tốc độ trung bình xuống dốc là 19 km/h.

Giải :

a) Ta có : AH + HB = AB. Suy ra $h.\cot 6^\circ + h.\cot 4^\circ = 762$

$$\Rightarrow h = \frac{762}{\cot 4^\circ + \cot 6^\circ} \approx 32 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của con dốc là 32 m.

b) Ta tính được hai đoạn AC và CB : $AC = \frac{h}{\sin 6^\circ} \approx 306 \text{ (m)} = 0,306 \text{ km}$; $BC = \frac{h}{\sin 4^\circ} \approx 459 \text{ (m)} = 0,459 \text{ km}$.

$$t = \frac{AC}{4} + \frac{CB}{19} \approx 0,1 \text{ (h)} = 6 \text{ phút}.$$

Vậy bạn An đến trường lúc 6 giờ 6 phút.

2. THỰC HÀNH NGOÀI TRỜI

◆ Đo chiều cao

a) Nhiệm vụ : Xác định chiều cao của một cột cờ.

b) Chuẩn bị : Giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi.

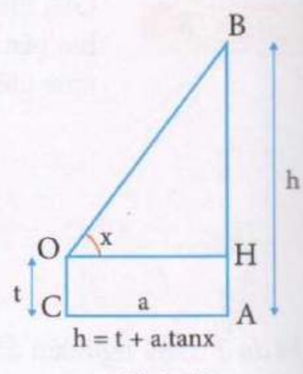
c) Hướng dẫn thực hiện :

Cách 1 :

– Đặt giác kế thẳng đứng cách chân cột cờ một khoảng a (CA = a), giả sử chiều cao của giác kế là t (OC = t).

– Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh B của cột cờ. Đọc trên giác kế số đo x của góc $\widehat{HOB}$.

– Dùng máy tính bỏ túi để tính chiều cao cột cờ theo công thức $h = t + a.\tan x$ và báo cáo kết quả. Chứng tỏ rằng kết quả tính được ở trên chính là chiều cao AB của cột cờ.



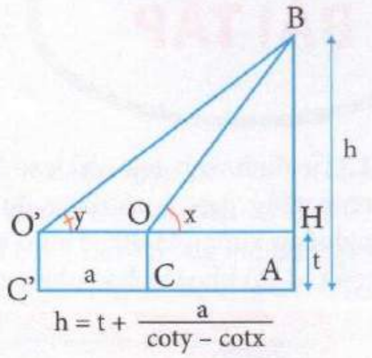
Hình 15

Cách 2 :

– Từ một điểm tuỳ ý, quay thanh giác kế có chiều cao t sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh B của cột cờ. Đọc trên giác kế số đo x của góc $\widehat{HOB}$.

– Di chuyển ra xa khỏi cột cờ một đoạn OO′ = a. Từ O′ lại quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh B của cột cờ. Đọc trên giác kế số đo y của góc $\widehat{HO'B}$.

– Dùng máy tính bỏ túi để tính chiều cao cột cờ theo công thức $h = t + \dfrac{a}{\cot y - \cot x}$ và báo cáo kết quả. Chứng tỏ rằng kết quả tính được ở trên chính là chiều cao AB của cột cờ.



Hình 16

◆ Đo khoảng cách

a) Nhiệm vụ : Xác định chiều rộng của một con kênh từ một bên bờ kênh.

b) Chuẩn bị : Ê ke, giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi.

c) Hướng dẫn thực hiện :

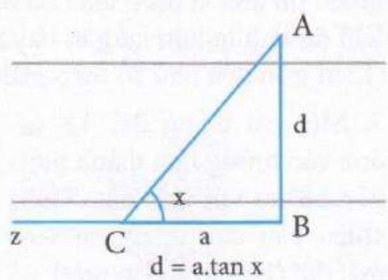
Cách 1 :

– Ta coi hai bờ kênh là song song với nhau. Chọn một điểm A ở bên kia bờ. Lấy một điểm B bên này sao cho AB vuông góc với các bờ kênh.

– Dùng ê ke kẻ đường thẳng Bz phía bên này sông sao cho $Bz \perp BA$.

– Lấy điểm C trên Bz, dùng thước cuộn đo đoạn BC, giả sử BC = a.

– Dùng giác kế đo góc BCA, giả sử $\widehat{BCA} = x$. Tính chiều rộng của con sông theo công thức d = a.tanx và báo cáo kết quả.



Hình 17

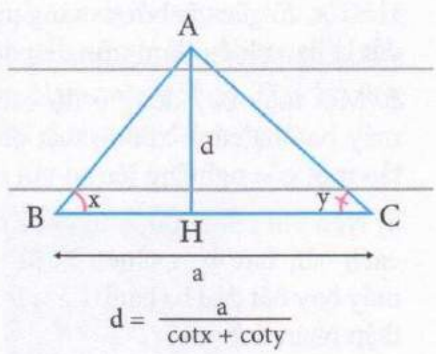
Cách 2 :

– Từ một điểm B tại bờ bên này ngắm đến điểm A bên bờ bên kia. Dùng giác kế đo góc giữa BA và bờ sông, ví dụ $\widehat{HBA} = x$.

– Di chuyển song song với bờ kênh một đoạn BC = a.

– Từ điểm C lại ngắm đến điểm A. Dùng giác kế đo góc giữa CA và bờ sông, ví dụ $\widehat{BCA} = y$. Lưu ý x, y phải là hai góc nhọn.

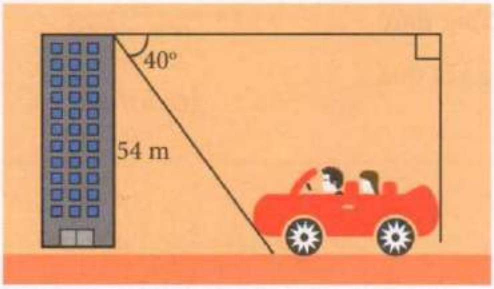
– Tính bề rộng con sông theo công thức $d = \dfrac{a}{\cot x + \cot y}$. Báo cáo kết quả và chứng tỏ rằng kết quả tính được ở trên chính là bề rộng của con kênh.



Hình 18

BÀI TẬP

1. Từ đỉnh một toà nhà cao 54 m, người ta nhìn thấy một ô tô đang đỗ dưới một góc nghiêng xuống là 40°. Hỏi ô tô đang đỗ cách toà nhà đó khoảng bao nhiêu mét ?

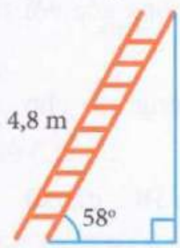


2. Một người quan sát đứng cách một toà nhà khoảng 25 m. Góc nâng từ chỗ anh ta đứng đến nóc tòa nhà là 36°.

a) Tính chiều cao của toà nhà (làm tròn đến mét).

b) Nếu anh ta dịch chuyển sao cho góc nâng là 32° thì anh ta cách toà nhà bao nhiêu mét ? Khi đó anh ta tiến lại gần hay ra xa toà nhà ? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.)

3. Một cái thang dài 4,8 m dựa vào tường làm thành một góc 58° so với mặt đất. Tính chiều cao của thang so với mặt đất (làm tròn đến mét).



4. Đài quan sát ở Toronto, Ontario (Canada) cao 533 m. Ở một thời điểm vào ban ngày, Mặt Trời chiếu tạo thành bóng dài 1100 m. Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia sáng mặt trời và mặt đất là bao nhiêu (làm tròn đến độ)?

5. Một máy bay đang ở độ cao 10 km. Khi máy bay hạ cánh xuống mặt đất, đường bay tạo một góc nghiêng lên so với mặt đất.

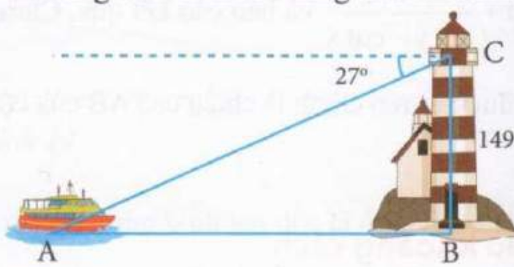
a) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 3° thì cách sân bay bao nhiêu ki-lô-mét phải cho máy bay bắt đầu hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) ?

b) Nếu cách sân bay 300 km, máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến độ) ?

6. Một người quan sát ở đài hải đăng cao 800 feet (đơn vị đo lường Anh) so với mực nước biển nhìn thấy một con tàu ở xa với một góc nghiêng xuống là 1°42′.

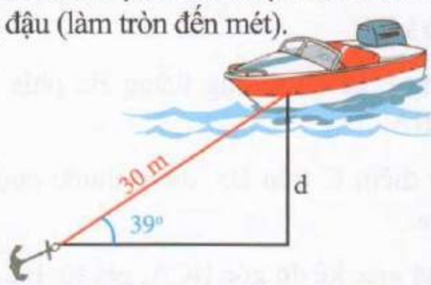
Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân ngọn hải đăng là bao nhiêu hải lí (1 hải lí = 5280 feet) ?

7. Một người quan sát ở đài hải đăng cao 149 m so với mực nước biển nhìn thấy một con tàu ở xa với một góc nghiêng xuống là 27°. Hỏi tàu đang cách chân hải đăng bao nhiêu mét ?

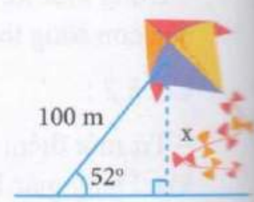


8. Một học sinh đứng ở mặt đất cách tháp ăng-ten cao 150 m nhìn thấy đỉnh tháp theo một góc nghiêng lên là 20° và khoảng cách từ mắt đến mặt đất là 1 m. Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

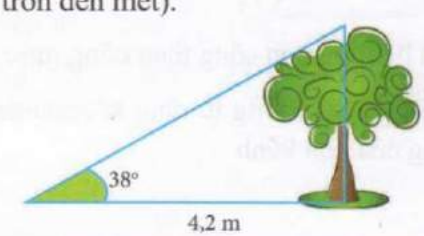
9. Một chiếc thuyền đang thả neo trên sông. Cho biết dây neo dài 30 m và có góc nghiêng lên 39°. Tính độ sâu của mực nước chỗ thuyền đang đậu (làm tròn đến mét).



10. Một học sinh thả diều ngoài đồng, cho biết đoạn dây đã thả dài 100 m và có góc nâng 52°. Tính chiều cao của diều so với mặt đất (làm tròn đến mét).

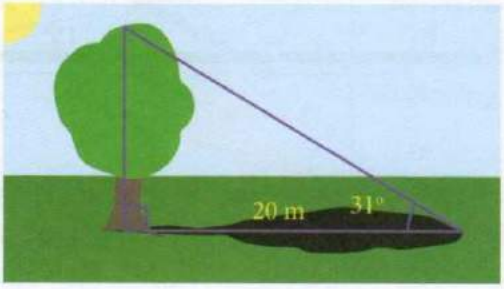


11. Một cái cây có bóng trên mặt đất dài 4,2 m. Cho biết tia nắng qua ngọn cây nghiêng một góc 38° so với mặt đất. Tính chiều cao của cây (làm tròn đến mét).

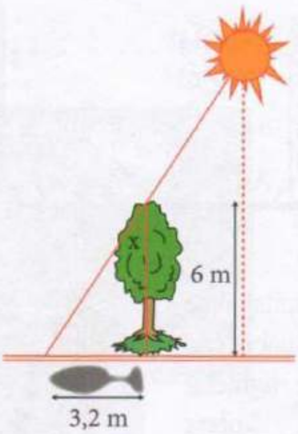


LUYỆN TẬP

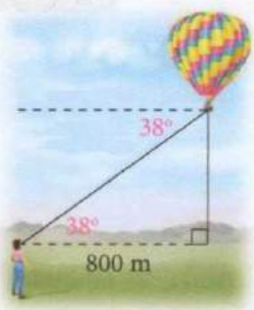
1. Một cái cây có bóng trên mặt đất dài 20 m. Cho biết tia nắng qua ngọn cây nghiêng một góc 31° so với mặt đất. Tính chiều cao của cây.



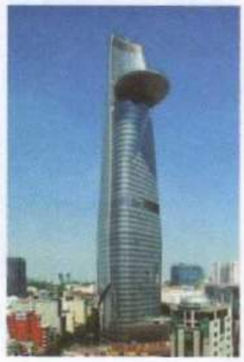
2. Một cái cây cao 6 m đang có bóng dài 3,2 m. Tính góc hợp bởi tia nắng với thân cây.



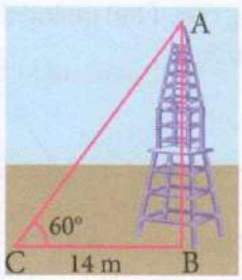
3. Một người đứng cách nơi thả khinh khí cầu 800 m nhìn thấy nó với góc nghiêng 38°. Tính độ cao của khinh khí cầu. Cho biết khoảng cách từ mặt đất đến mắt người đó là 1,5 m.



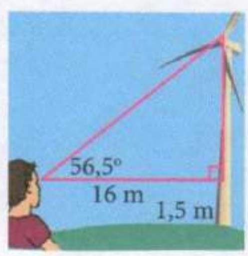
4. Một du khách đếm được 645 bước chân khi đi từ ngay dưới chân toà nhà BITEXCO (Thành phố Hồ Chí Minh) thẳng ra phía ngoài cho đến vị trí có góc nhìn lên đỉnh là 45°. Tính chiều cao của tháp, biết rằng khoảng cách trung bình của mỗi bước chân là 0,4 m.



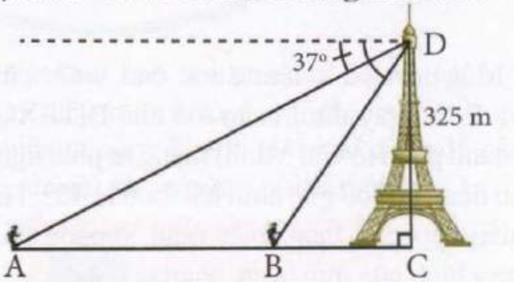
5. Một người đứng cách chân tháp 14 m nhìn thấy đỉnh tháp theo góc nghiêng 60°. Tính chiều cao của tháp.



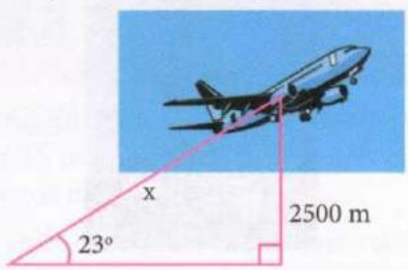
6. Một người có mắt cách mặt đất 1,5 m, đứng cách thân một cái quạt gió 16 m nhìn thấy tâm của cánh quạt với góc nâng 56,5°. Tính khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất.



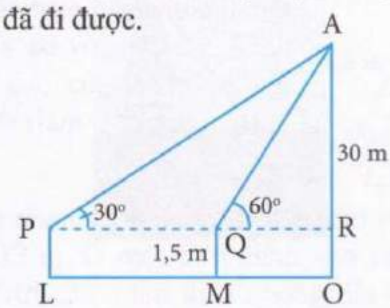
7. Một người đứng trên đỉnh tháp cao 325 m nhìn thấy hai điểm A và B với hai góc hạ lần lượt là 37° và 72°. Tính khoảng cách AB.



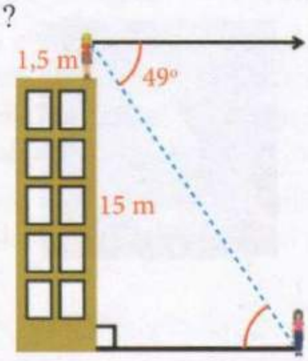
8. Một máy bay cất cánh theo phương có góc nâng 23°. Hỏi muốn đạt độ cao 2500 m, máy bay phải bay một đoạn đường là bao nhiêu mét ?



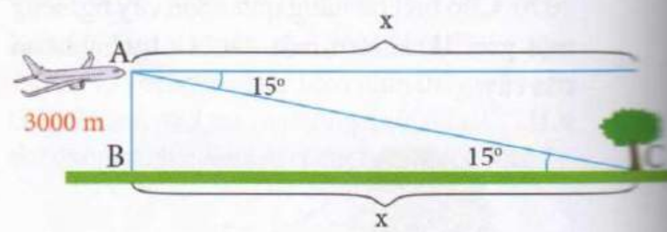
9. Bạn Hùng có tầm mắt cao 1,5 m đang đứng gần một cao ốc cao 30 m thì nhìn thấy nóc toà nhà với góc nâng 30°. Hùng đi về phía toà nhà cho đến khi nhìn thấy nóc toà nhà với góc nâng bằng 60°. Tính quãng đường mà bạn Hùng đã đi được.



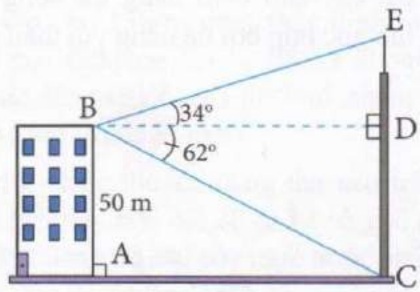
10. Một học sinh có tầm mắt cao 1,5 m đứng trên sân thượng của một căn nhà cao 15 m nhìn thấy bạn mình với góc nghiêng xuống 49°. Hỏi cô bạn đang ở cách căn nhà bao nhiêu mét ?



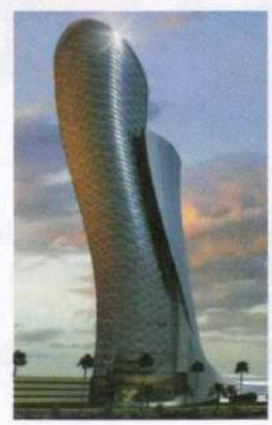
11. Một máy bay thể thao đang bay ngang ở độ cao 3000 m nhìn thấy một cái cây với góc nghiêng xuống 15°. Hỏi máy bay phải bay một đoạn đường là bao nhiêu mét thì sẽ ở ngay trên ngọn cây ?

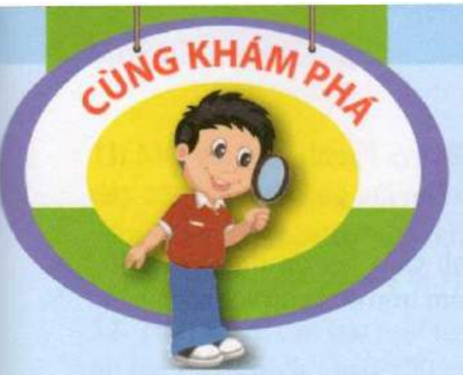


12. Từ nóc một cao ốc cao 50 m người ta nhìn thấy chân và đỉnh một cột ăng-ten với các góc hạ và nâng lần lượt là 62° và 34°. Tính chiều cao của cột ăng-ten.



13. Tháp Capital Gate tại Abu Dhabi cao 160 m và nghiêng 18°. Nếu không nghiêng thì tháp cao bao nhiêu mét ?

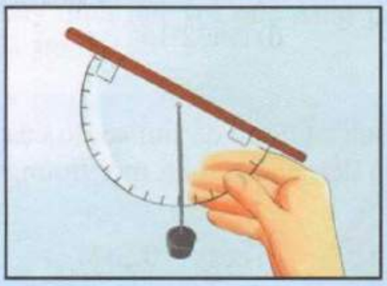




CÁCH LÀM MỘT GIÁC KẾ

Để giải các bài toán ứng dụng tỉ số lượng giác trong thực tế ta cần phải có giác kế để đo góc. Sau đây là hai cách đơn giản và nhanh nhất để các em có một cái giác kế.

Cách 1 : **LÀM GIÁC KẾ THỦ CÔNG**



– Đục một lỗ tại tâm O của một cái thước đo độ (Có thể hơ lửa nóng đầu nhọn của com pa rồi dùi xuyên qua thước một cách dễ dàng).

– Xỏ một sợi chỉ qua lỗ vừa đục và buộc hai đầu sợi chỉ vào một vật nặng.

Lưu ý : Sợi chỉ và vật nặng này đóng vai trò kim đồng hồ, giúp ta tính được góc nghiêng, nên phải đảm bảo khi nghiêng thước để ngắm, sợi chỉ phải luôn chỉ phương thẳng đứng và không bị ma sát với mặt thước.

– Dùng băng keo dán một cái ống hút dọc theo đáy của thước đo độ để làm ống ngắm.

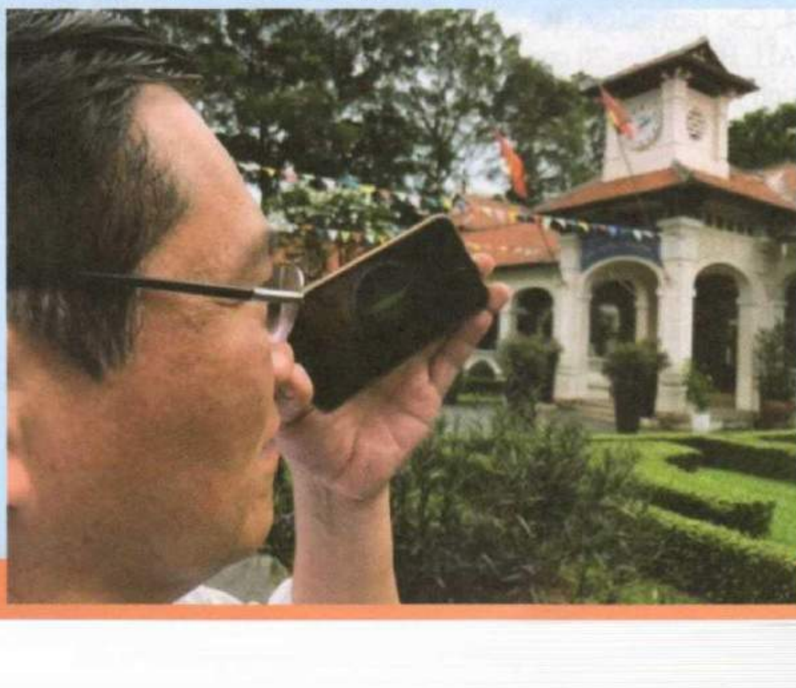
Vậy là bạn đã có một cái giác kế hoàn chỉnh để đo góc, chỉ cần lưu ý rằng góc nâng của phương ống ngắm so với mực nước biển là góc phụ của góc nhọn giữa sợi chỉ và ống hút.

Cách 2 : **LÀM GIÁC KẾ KĨ THUẬT SỐ**

– Dùng điện thoại di động cài ứng dụng miễn phí iHandy Level Free.

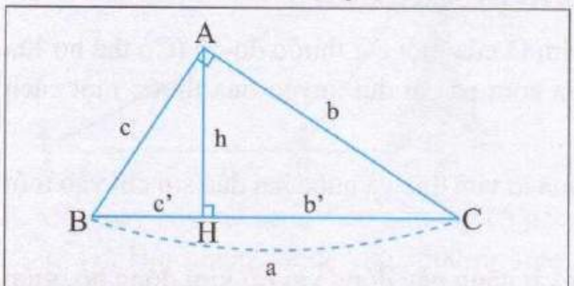
– Ứng dụng này cho phép bạn biến điện thoại của mình thành một giác kế.

– Ống ngắm chính là một cạnh của điện thoại. Khi bạn nghiêng điện thoại để ngắm ứng dụng sẽ tự động tính góc nghiêng và biểu thị ra màn hình, bạn chỉ việc bấm nút khoá để cố định góc ngắm và dùng máy tính bỏ túi (lại một ứng dụng khác trong điện thoại di động) để tính khoảng cách.



ÔN TẬP CHƯƠNG 1

1. Viết công thức tính các độ dài trong cột 1 theo các độ dài trong cột 2 và ghi kết quả vào cột 3 theo mẫu cho dưới đây :



Viết công thức tính	theo	Kết quả
h	b' ; c'	$h = \sqrt{b'.c'}$
a	b ; c	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$
c	a ; c'	
b	a ; b'	
h	b ; c ; a	
c	h ; b	

2. Biết tỉ số hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 5 : 6, cạnh huyền là 122 cm. Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AB : AC = 3 : 7, AH = 42 cm. Tính BH, CH.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AC = 20 cm, AH = 12 cm. Tính diện tích tam giác ABC.

5. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI, cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng :

a) Tam giác DIL là một tam giác cân.

b) Tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

6. Dùng máy tính cầm tay để tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) :

a) $\sin 70^\circ 13'$; b) $\cos 25^\circ 32'$;

c) $\tan 43^\circ 10'$; d) $\cot 32^\circ 15'$.

7. Dùng máy tính cầm tay để tìm số đo của góc x (làm tròn đến phút) trong mỗi trường hợp sau :

a) $\sin x = 0{,}3495$; b) $\cos x = 0{,}5427$;

c) $\tan x = 1{,}5142$; d) $\cot x = 3{,}163$.

8. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\sin 78^\circ$; $\cos 14^\circ$; $\sin 47^\circ$; $\cos 87^\circ$.

b) $\tan 73^\circ$; $\cot 25^\circ$; $\tan 62^\circ$; $\cot 38^\circ$.

9. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng

a) b = 16 cm, $\widehat{C} = 30^\circ$;

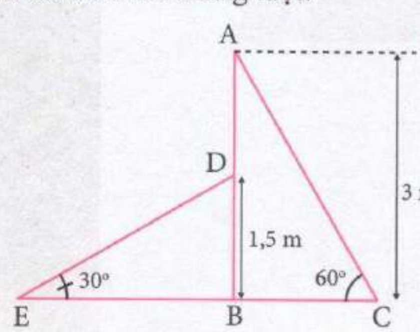
b) c = 24 cm, $\widehat{C} = 60^\circ$;

c) a = 20 cm, $\widehat{C} = 45^\circ$;

d) a = 10 cm, $\widehat{B} = 38^\circ$;

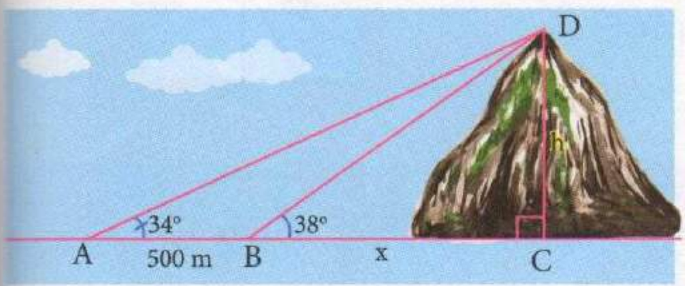
e) c = 21 cm, b = 18 cm.

10. Một nhà trẻ muốn thiết kế hai cái cầu tuột trong sân chơi. Đối với trẻ dưới 5 tuổi, cầu tuột cao 1,5 m và nghiêng với mặt đất một góc 30°. Đối với trẻ trên 5 tuổi cầu tuột cao 3 m và nghiêng với mặt đất một góc 60°. Tính chiều dài của mỗi máng tuột.



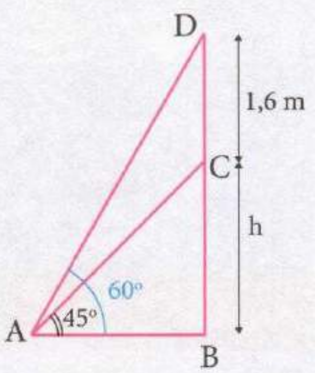
11. Một cái diều đang bay ở độ cao 60 m. Sợi dây cột diều nghiêng với mặt đất một góc 60°. Tìm chiều dài của sợi dây khi nó được căng thẳng (không có chỗ nào bị võng).

12. Tính chiều cao của một ngọn núi, cho biết tại hai điểm cách nhau 500 m, người ta nhìn thấy đỉnh núi với góc nâng lần lượt là 34° và 38°.

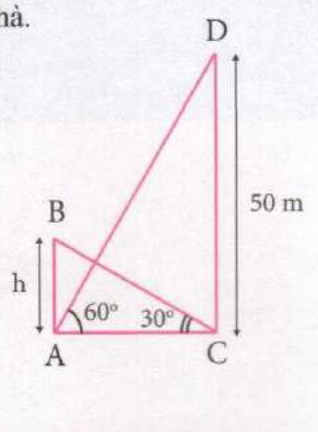


13. Một bức tượng cao 1,6 m được đặt trên một cái bệ. Tại một điểm trên mặt đất người ta nhìn thấy nóc tượng và nóc bệ với các góc nâng lần lượt là 60° và 45°.

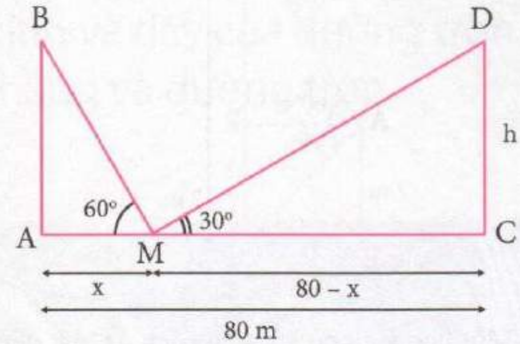
Tính chiều cao của cái bệ.



14. Từ chân một cái tháp cao 50 m người ta nhìn thấy đỉnh một toà nhà với góc nâng 30°. Trong khi đó từ chân toà nhà lại nhìn thấy đỉnh tháp với góc nâng 60°. Tính chiều cao của toà nhà.

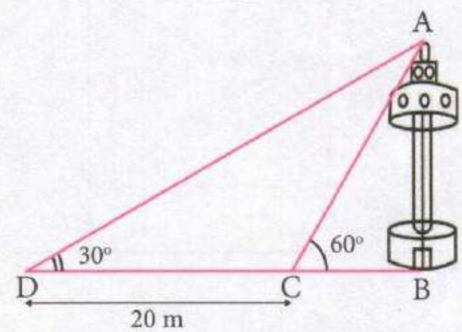


15. Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80 m. Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy đỉnh hai trụ điện với các góc nâng lần lượt là 60° và 30°. Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

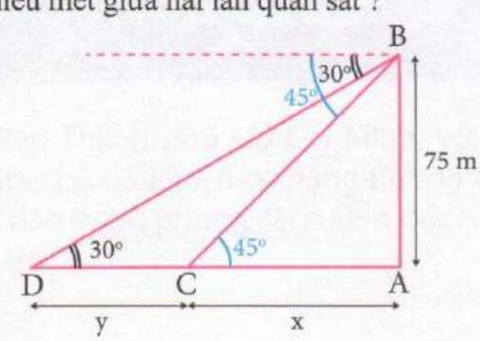


16. Một cái tháp được dựng bên bờ một con sông, từ một điểm đối diện với tháp ngay bờ bên kia người ta nhìn thấy đỉnh tháp với góc nâng 60°. Từ một điểm khác cách điểm ban đầu 20 m người ta cũng nhìn thấy đỉnh tháp với góc nâng 30°.

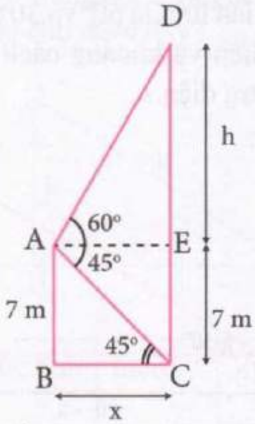
Tính chiều cao của tháp và bề rộng của sông.



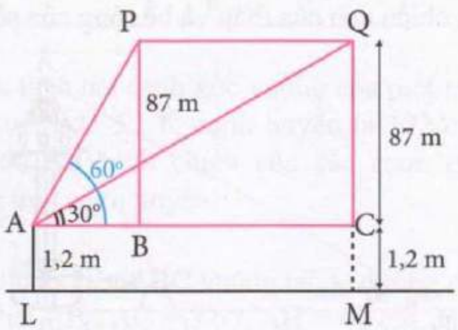
17. Từ trên một ngọn hải đăng cao 75 m, người ta quan sát hai lần thấy một chiếc thuyền đang hướng về phía hải đăng với góc hạ lần lượt là 30° và 45°. Hỏi chiếc thuyền đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát ?



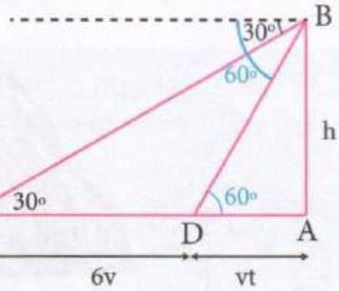
18. Từ trên đỉnh một tòa nhà cao 7 m, người ta nhìn thấy đỉnh một tháp truyền hình với góc nâng 60°, và nhìn thấy chân của tháp với góc hạ 45°. Tính chiều cao của tháp truyền hình.



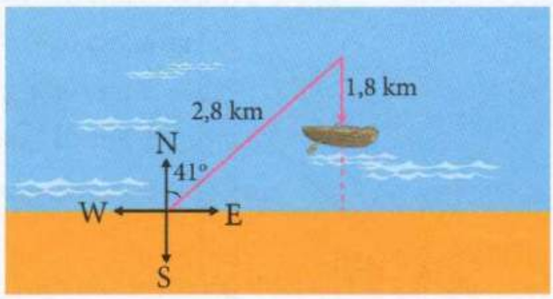
19. Một học sinh có khoảng cách từ mắt đến mặt đất là 1,2 m bắt đầu quan sát một trái bóng bay với góc nâng 60°. Một lúc sau lại nhìn thấy quả bóng bay với góc nâng 30°. Hỏi giữa hai lần quan sát quả bóng đã bay được bao nhiêu mét ? Cho biết độ cao của quả bóng luôn không đổi và bằng 88,2 m.



20. Một người đang ở trên một cái tháp nhìn xuống một con đường chạy thẳng đến chân tháp. Anh ta nhìn thấy một chiếc xe máy với góc hạ 30°. Sáu phút sau lại nhìn thấy nó với góc hạ 60°. Hỏi bao lâu sau nữa thì xe máy sẽ chạy đến chân tháp ? Cho biết vận tốc xe máy không đổi.



21. Một thuỷ thủ lái thuyền ra biển về hướng đông bắc với góc nghiêng 41°. Đi được 2,8 km, anh ta phát hiện sắp hết nhiên liệu nên vội quay thuyền vào bờ (như hình vẽ), đi được 1,8 km thì thuyền tắt máy. Hỏi anh ta phải bơi khoảng bao nhiêu mét nữa mới vào đến bờ ?



CHƯƠNG 2

ĐƯỜNG TRÒN

- Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn
- Đường kính và dây của đường tròn
- Đường thẳng và đường tròn

Toà nhà Bưu điện Thành phố Hồ Chí Minh, với mái vòm và ghế ngồi cho du khách có dạng đường cong tròn tạo sự độc đáo trong phong cách kiến trúc.

CHỦ ĐỀ 5

SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Ôn tập về đường tròn

Cách xác định đường tròn

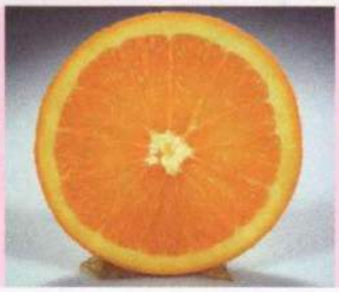
Tính chất đối xứng của đường tròn

Xe đạp là một trong những phát minh quan trọng của con người. Nhiều bộ phận trong chiếc xe đạp có dạng hình tròn, nhờ vậy xe đạp bền chắc và dễ dàng di chuyển.

1. ÔN TẬP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

Hoạt động 1

Tìm những đồ vật hình tròn trong thực tế.



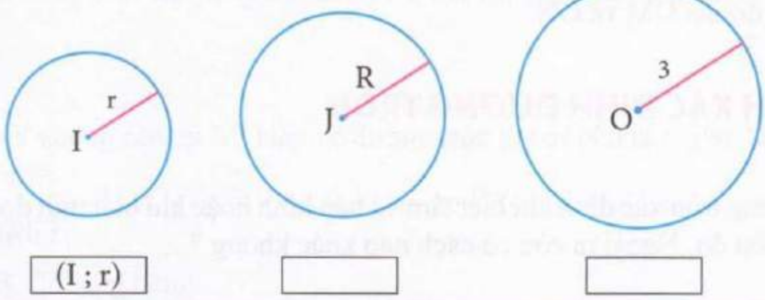
Hoạt động 2

Nêu nhận xét về đặc điểm của đường tròn.

Đường tròn tâm O *bán kính* R (*với* R > 0) *là hình gồm các điểm cách* O *một khoảng bằng* R. *Ta kí hiệu đường tròn tâm* O *bán kính* R *là* (O ; R).

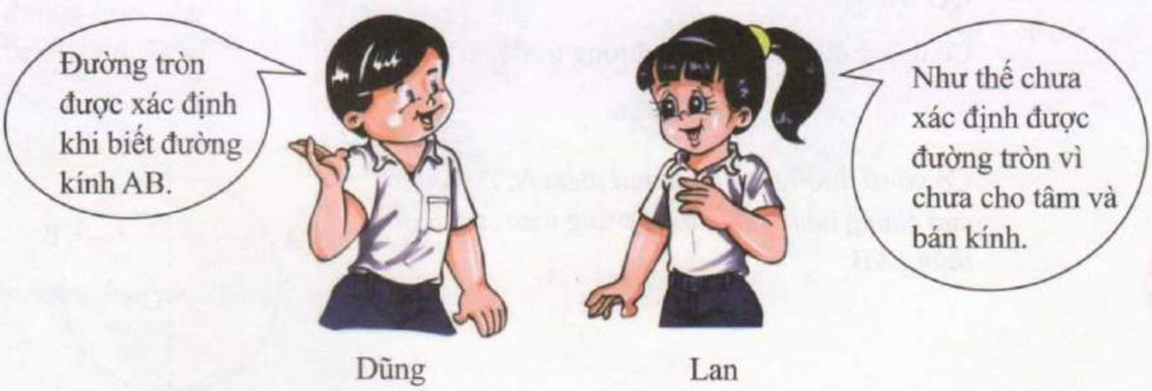
THỬ TÀI BẠN

Hãy quan sát các hình vẽ rồi ghi kí hiệu đường tròn vào các ô trống bên dưới.



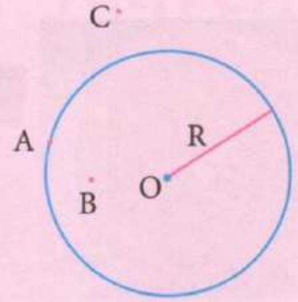
Chú ý : Ta có thể kí hiệu đường tròn tâm O là (O) khi không cần quan tâm tới bán kính.

BẠN NÀO ĐÚNG ?



Theo em, bạn nào đúng ?

Hoạt động 3 Cho đường tròn tâm O bán kính R. Gọi A là điểm nằm trên đường tròn, B nằm trong đường tròn ; C nằm ngoài đường tròn. Hãy điền dấu >, <, hoặc = vào ô trống :



OA $\square$ R ;

OB $\square$ R ;

OC $\square$ R.

Ví dụ : Cho đường tròn tâm O bán kính R = 5 cm ; A, B, C là các điểm sao cho OA = 4 cm ; OB = 6 cm ; OC = 5 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của các điểm A, B, C đối với đường tròn (O).

Giải : Ta có R = 5 cm.

- OA = 4 cm nên OA < R. Suy ra A nằm trong đường tròn (O).
- OB = 6 cm nên OB > R. Suy ra B nằm ngoài đường tròn (O).
- OC = 5 cm nên OC = R. Suy ra C nằm trên đường tròn (O).

THỬ TÀI BẠN

Cho đường tròn tâm O bán kính 3 cm, điểm M nằm ngoài đường tròn, điểm N nằm trong đường tròn. Hãy so sánh độ dài OM và ON.

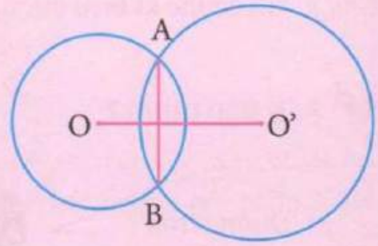
2. CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

Ta đã biết một đường tròn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó. Ngoài ra còn có cách nào khác không ?

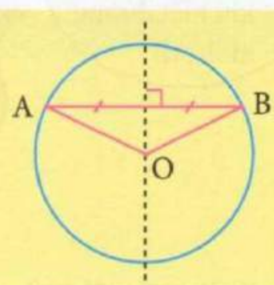
Hoạt động 4 Cho đoạn thẳng AB = 6 cm. Hãy vẽ hai đường tròn tâm O và O' qua hai điểm A, B.

Có nhận xét gì về quan hệ giữa đường thẳng OO' và AB ?

Có thể vẽ được bao nhiêu đường tròn như vậy ?



Có vô số đường tròn qua hai điểm A, B *và tâm của chúng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng* AB.

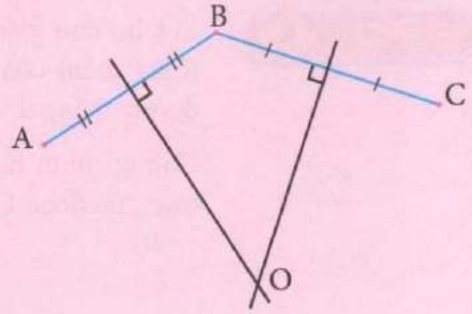


Hoạt động 5

Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực của AB và BC.

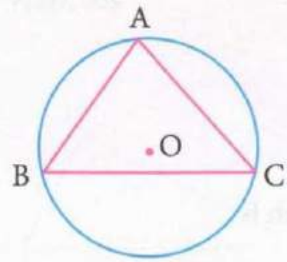
So sánh độ dài của OA, OB, OC.

Vẽ đường tròn qua ba điểm A, B, C.



Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

Chú ý : Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C gọi là ***đường tròn ngoại tiếp*** tam giác ABC. Khi đó, tam giác ABC được gọi là ***tam giác nội tiếp*** đường tròn (h.1).



Hình 1

Ví dụ : Cho tam giác đều ABC. Nêu cách vẽ đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

Giải : Vẽ hai đường trung trực của AB và AC.

Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực này.

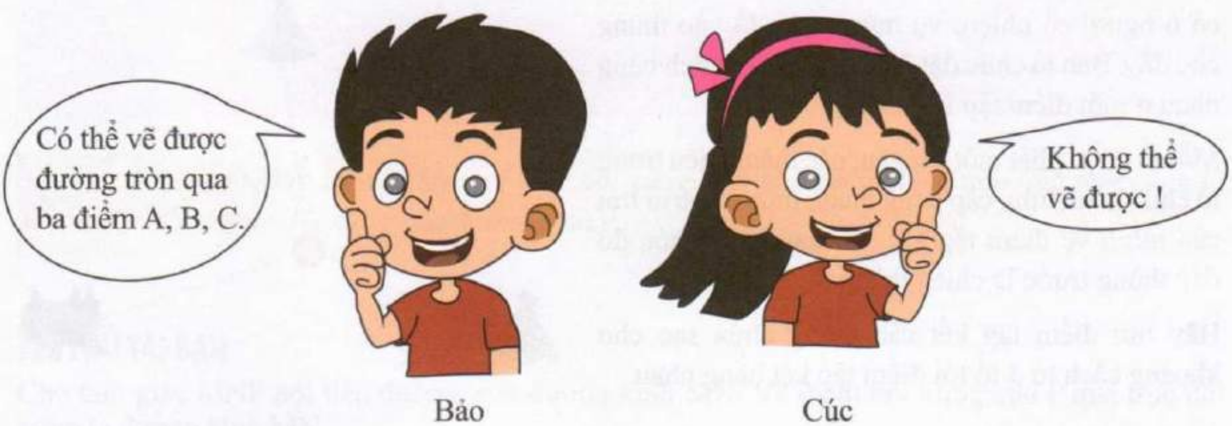
Đường tròn tâm O bán kính OA là đường tròn qua ba điểm A, B, C.

THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác MNP vuông cân tại M. Hãy vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

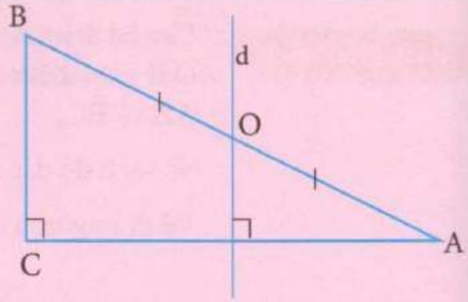


Theo em, bạn nào đúng ?

Hoạt động 6

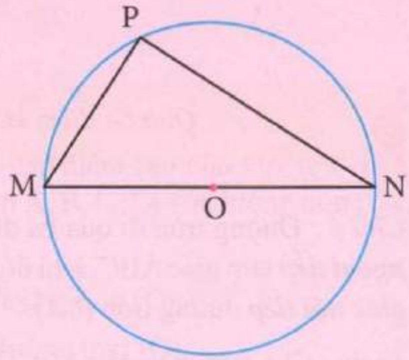
a) Cho tam giác ABC vuông tại C có O là trung điểm của cạnh huyền AB. Từ O kẻ đường thẳng d vuông góc với CA.

Chứng minh rằng đường thẳng d là trung trực của đoạn CA. Từ đó suy ra OA = OB = OC.



b) Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm O đường kính MN.

Chứng minh rằng OM = ON = OP. Từ đó suy ra góc MPN vuông.



Định lí

+ Trong một tam giác vuông, trung điểm của cạnh huyền là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đó.

+ Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì đó là tam giác vuông.

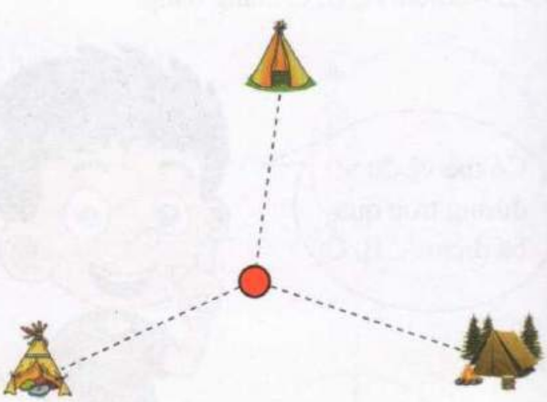
THƯ GIÃN

TRÒ CHƠI TẬP THỂ : MÚC NƯỚC ĐỔ ĐẦY THÙNG

Có 3 tổ dựng lều ở 3 địa điểm như hình vẽ. Mỗi tổ có 6 người có nhiệm vụ múc nước đổ vào thùng cho đầy. Ban tổ chức đặt 3 thùng có dung tích bằng nhau ở một điểm tập kết chung.

Mỗi tổ được phát một cái gàu, các thành viên trong tổ chia thành từng cặp cõng nhau, múc nước từ trại của mình về điểm tập kết. Tổ nào múc nước đổ đầy thùng trước là chiến thắng.

Hãy tìm điểm tập kết các thùng chứa sao cho khoảng cách từ 3 tổ tới điểm tập kết bằng nhau.

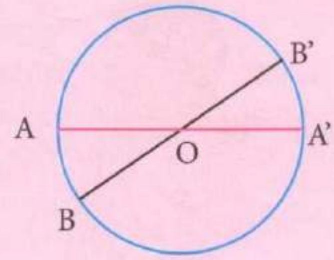


3. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Hoạt động 7

Cho đường tròn (O), A là điểm nằm trên đường tròn. Tìm điểm A' đối xứng với A qua tâm O. Lấy một điểm B khác A cũng thuộc đường tròn. Tìm điểm B' đối xứng với B qua tâm O.

Có nhận xét gì về hai điểm A' và B' đối với đường tròn O.

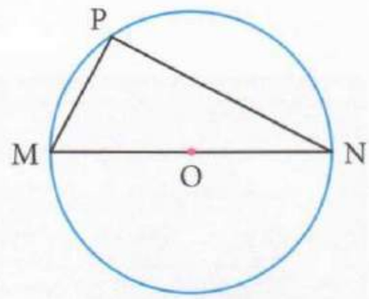


Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

THỬ TÀI BẠN

a) Điểm đối xứng của M qua O trong hình 2 là điểm nào ?

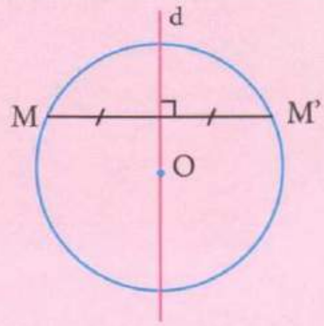
b) Vẽ điểm P' đối xứng của P qua O.



Hình 2

Hoạt động 8

Cho đường tròn (O), d là đường thẳng đi qua tâm. Lấy M là điểm nằm trên đường tròn. Tìm điểm M' đối xứng của M qua d. Có nhận xét gì về điểm M' ? Hãy chứng minh điều này.



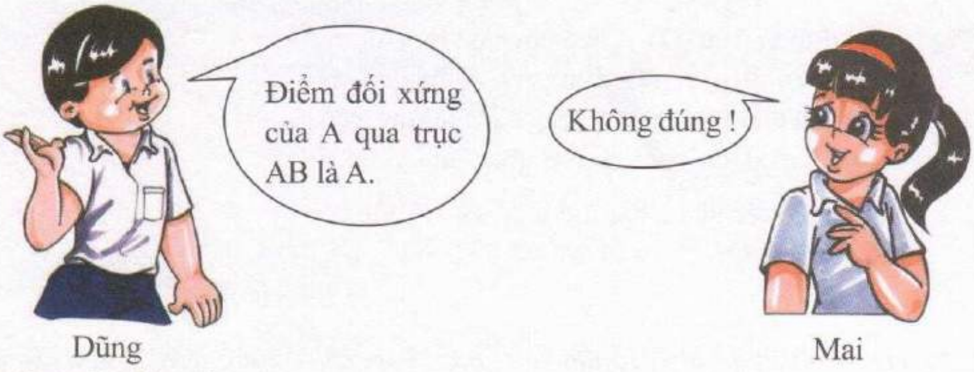
Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường thẳng nào qua tâm cũng là trục đối xứng của đường tròn.

THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn đường kính MN. Vẽ điểm đối xứng của P qua trục đối xứng là đường kính MN.

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho đường tròn đường kính AB.



Theo em, bạn nào đúng ?

GHI NHỚ

- Đường tròn tâm O bán kính R (với R > 0) là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R. Ta kí hiệu đường tròn tâm O bán kính R là (O ; R).
- Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Trong một tam giác vuông, trung điểm của cạnh huyền là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đó.
- Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì đó là tam giác vuông.
- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường thẳng nào qua tâm cũng là trục đối xứng của đường tròn.

BÀI TẬP

1. Các phát biểu nào sau đây xác định duy nhất một đường tròn ?

a) Đường tròn đi qua hai điểm cố định.

b) Đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng.

c) Đường tròn tâm O, bán kính 2 cm.

d) Đường tròn đường kính AB cho trước.

2. Cho đường tròn tâm O, bán kính 5 cm. Cho biết OA = 3 cm, OB = 4 cm, OC = 7 cm, OD = 5 cm.

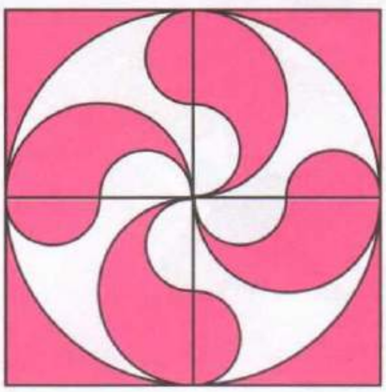
Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài đường tròn.

3. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy xác định vị trí tương đối của mỗi điểm $M(-1\ ;\ 1)$, $N(\sqrt{2}\ ;-\sqrt{2})$, $P(1\ ;-2)$ đối với đường tròn $(O\ ;2)$.

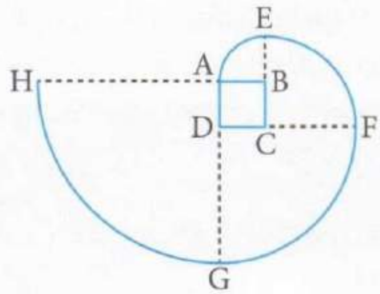
4. Cho đường tròn $(O\ ;\ \sqrt{10}$ cm). Cho biết OI = 3 cm ; OJ = 4 cm ; OK = $\sqrt{10}$ cm.

Hãy xác định vị trí tương đối của I, J, K đối với đường tròn này.

5. Quan sát hình sau đây rồi vẽ chúng vào vở.



6. Quan sát hình vẽ dưới. Tính bán kính các đường tròn tâm B, tâm C, tâm D, tâm A. Cho biết ABCD là hình vuông cạnh 1 cm.



7. Một đĩa gốm cổ cần được phục hồi. Hãy xác định tâm và bán kính của đĩa.

8. Cho hình chữ nhật ABCD có AD = 18 cm, CD = 12 cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

LUYỆN TẬP

1. Cho tam giác ABC. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C và tâm đường tròn nằm trên AC. Khi nào thì tâm đường tròn (O) trùng với điểm A ?

2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính 3. Cho các điểm A(0 ; 0), B(2 ; 3), C(1 ; 5,2), D($\sqrt{10}$; 2). Hãy xác định vị trí các điểm A, B, C, D đối với đường tròn (O).

3. Cho hình vuông ABCD.

a) Chứng minh rằng bốn đỉnh hình vuông nằm trên một đường tròn. Hãy chỉ rõ tâm của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn, biết cạnh hình vuông là 4 cm.

4. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn này.

5. Cho tam giác ABC nhọn, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

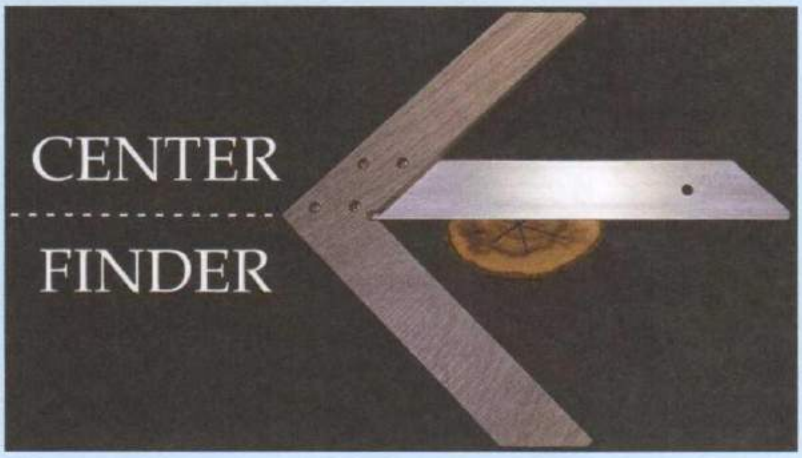
a) Chứng minh rằng bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi O là trung điểm AH. Chứng minh rằng E, F thuộc đường tròn (O ; OA).

DỤNG CỤ XÁC ĐỊNH TÂM ĐƯỜNG TRÒN

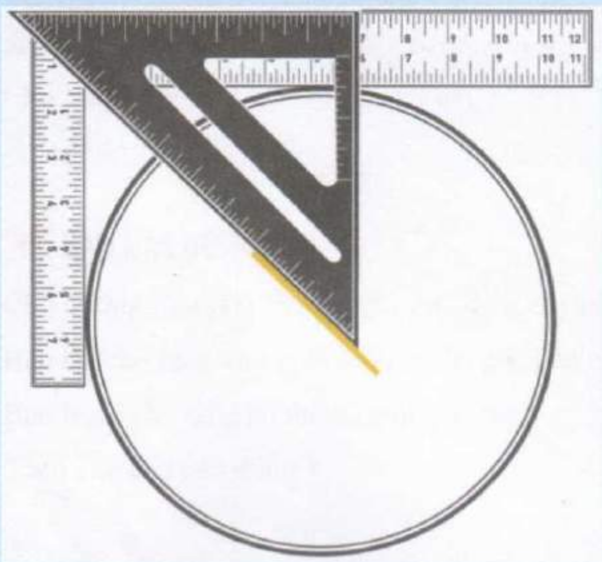
Xác định tâm đường tròn có nhiều cách. Chẳng hạn ta có thể dựng đường trung trực của hai dây cung không song song, giao điểm của hai đường trung trực là tâm của đường tròn.

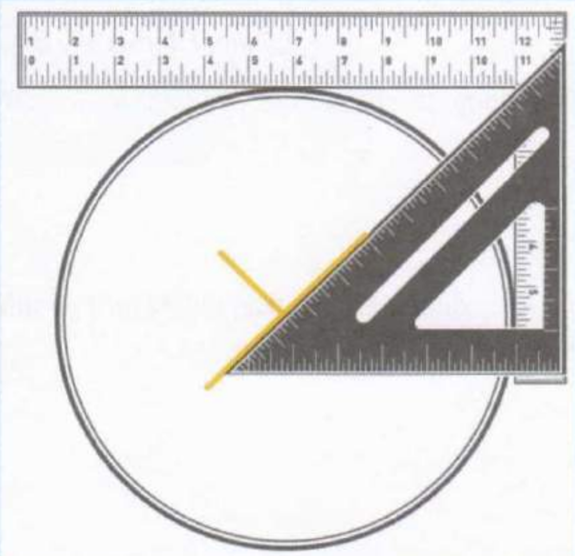
Trong thực tế, những người thợ mộc thường tự chế tạo ra dụng cụ tìm tâm đường tròn đơn giản và tiện lợi như dưới đây.



Em hãy mô tả thước ở trên và nêu cách sử dụng thước để tìm tâm của một vật hình tròn.

Tương tự như trên, dùng hai thước gồm một thước chữ L và một thước ê kê vuông cân làm dụng cụ tìm tâm đường tròn như dưới đây.





CHỦ ĐỀ 6

ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

So sánh độ dài của đường kính và dây

Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Lỗ thoát âm và sáu dây đàn Guitar cho ta hình ảnh của đường tròn và các đường thẳng chứa các dây của đường tròn.

1. SO SÁNH ĐỘ DÀI CỦA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY

Hoạt động 1

Gọi M, N là hai điểm bất kì của đường tròn (O ; R), đoạn MN gọi là dây của đường tròn. Có nhận xét gì về độ dài của dây MN và độ dài đường kính ?

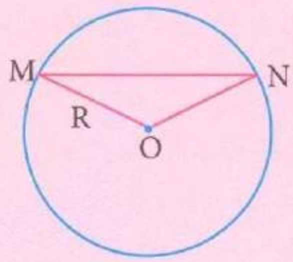
Hoạt động 2

Gọi MN là một dây bất kì của đường tròn (O ; R). Hãy điền vào ô trống :

– Khi MN là đường kính thì MN $\square$ 2R.

– Khi MN không là đường kính thì MN $\square$ 2R.

Vẽ tam giác OMN rồi chứng minh MN < 2R.



Định lí 1

Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây lớn nhất.

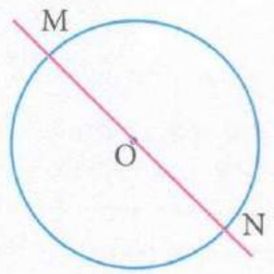
Ví dụ : Cho đường tròn (O), M là một điểm trên đường tròn. Vẽ điểm N trên đường tròn (O) sao cho MN dài nhất.

Giải :

Để MN là dây dài nhất, MN phải là đường kính.

Kẻ đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại N.

N là điểm cần tìm.



THỬ TÀI BẠN

Cho đường tròn tâm O bán kính 5 cm. A, B là hai điểm bất kì trên đường tròn. Chứng minh rằng AB $\leq$ 10 cm.

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho đường tròn (O) và AB, BC, AC là ba dây của đường tròn không phải là đường kính.

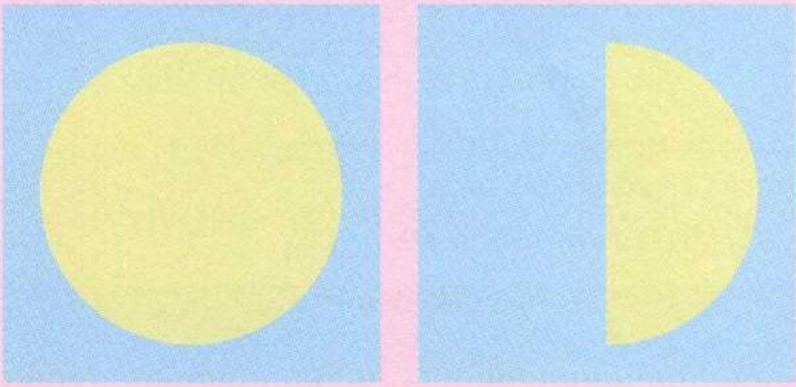
Bạn Đa cho rằng tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

Bạn Nghi cho rằng có thể có một góc tù.

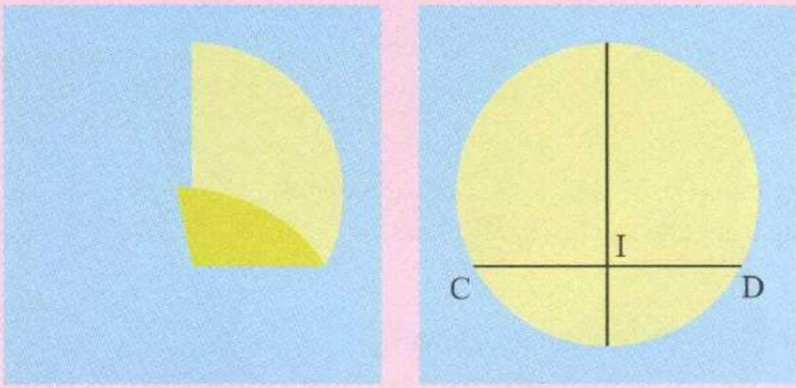
Theo em, bạn nào đúng ?

2. QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY

Hoạt động 3 Lấy một tờ giấy cắt một hình tròn rồi gấp đôi lại như hình vẽ dưới đây :



Tiếp tục gấp và mở ra như hình dưới đây :



a) Hãy nhận xét về hai nếp gấp ở trên.

b) Chứng minh IC = ID.

c) Trường hợp CD là đường kính thì IC = ID không ?

Định lí 2

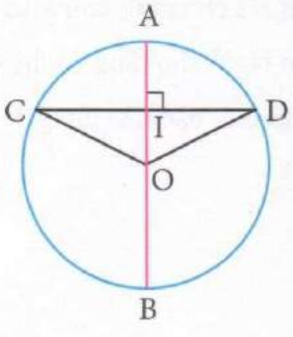
Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Ví dụ : Cho đường tròn đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại I. Chứng minh tam giác ACD cân tại A.

Giải :

CD là dây vuông góc với đường kính AB nên IC = ID.

AI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác ACD nên tam giác ACD cân tại A.



THỬ TÀI BẠN

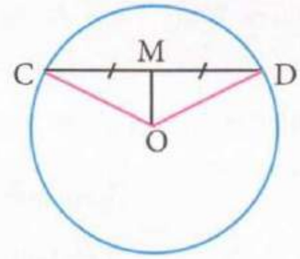
Cho đường tròn đường kính MN ; hai điểm P, Q nằm trên đường tròn sao cho MN vuông góc với PQ. I là giao điểm của MN và PQ. Cho biết PI = 5 cm. Vẽ hình và tính PQ.

Định lí 3

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Ví dụ : Cho đường tròn tâm O như hình vẽ, biết OC = 5 cm, CM = MD, OM = 3 cm. Tính CD.

Giải :



Do MC = MD nên theo định lí 3 thì OM ⊥ CD.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông MOC ta có :

$MC^2 = OC^2 - OM^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$

Suy ra MC = 4 cm.

CD = 2MC = 8 cm.

THỬ TÀI BẠN

Cho đường tròn (O), bán kính OM = 8 cm, điểm I thuộc đoạn OM sao cho IO = 2IM. Từ I kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt đường tròn tại A và B. Tính AB.

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Theo em, bạn nào đúng ?

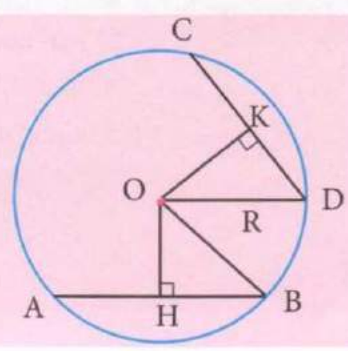
3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

Hoạt động 4

Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD khác đường kính. Từ O hạ OH và OK theo thứ tự vuông góc với AB và CD.

Hãy điền vào chỗ chấm (…) để chứng minh :

Nếu AB = CD thì OH = OK.



Xét hai tam giác vuông OHB và OKD, ta có :

OB = OD (………...)

HB = KD (………...)

Suy ra $\Delta OHB = \Delta OKD$.

Do đó OH = OK.

Hoạt động 5 Với đề bài cho như hoạt động 4, chứng minh : Nếu OH = OK thì AB = CD.

Định lí 4

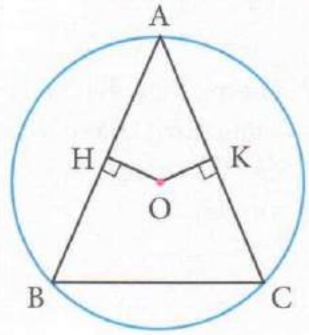
Trong một đường tròn :

a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Ví dụ : Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Từ O hạ đường thẳng OH và OK lần lượt vuông góc với AB và AC. Chứng minh rằng nếu OH = OK thì ABC là tam giác cân.

Giải :



Xét hai dây AB và AC.

Ta có OH là khoảng cách từ O tới AB, OK là khoảng cách từ O tới AC.

Mà OH = OK nên theo định lí trên thì AB = AC.

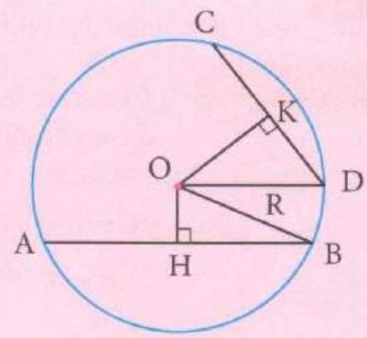
Vậy ABC là tam giác cân tại A.

THỬ TÀI BẠN

Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Từ O kẻ OM, ON, OP lần lượt vuông góc với AB, BC, CA. Chứng minh rằng OM = ON = OP.

Hoạt động 6 Cho đường tròn (O ; 10 cm) và hai dây AB = 8 cm, CD = 6 cm. Từ O hạ OH và OK theo thứ tự vuông góc với AB và CD.

Hãy tính OH, OK và cho biết đoạn nào dài hơn.



Hoạt động 7

Cho đường tròn (O ; 5 cm) và hai dây AB, CD.

Từ O hạ OH và OK theo thứ tự vuông góc với AB và CD.

Cho biết OH = 3 cm ; OK = 2 cm. Hãy so sánh độ dài hai dây AB và CD.

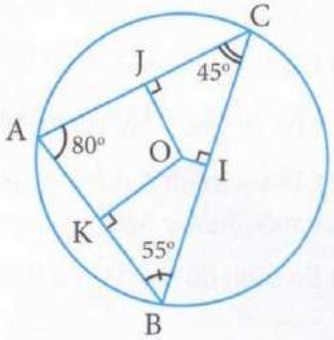
Định lí 5

Trong hai dây của một đường tròn :

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Ví dụ : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Số đo các góc A, B, C theo thứ tự là 80°, 55°, 45°. Từ O hạ các đường vuông góc OI, OJ, OK xuống các cạnh tương ứng BC, AC và AB. So sánh độ dài các đoạn thẳng OI, OJ và OK.



Giải :

Xét tam giác ABC, vì $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ nên BC > AC > AB.

BC, AC, AB là các dây của đường tròn, suy ra OI < OJ < OK.

THỬ TÀI BẠN

Cho ABC là tam giác cân có góc đỉnh A bằng 30°, nội tiếp đường tròn tâm O. Từ O hạ các đường thẳng vuông góc OM và ON xuống các cạnh tương ứng AB và BC.

Chứng minh OM < ON.

GHI NHỚ

- Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây lớn nhất.
- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.
- Trong một đường tròn :
  Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
  Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn :
  Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
  Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

BÀI TẬP

So sánh độ dài của đường kính và dây

1. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên trong đường tròn. AB là dây qua M vuông góc với OM ; CD là dây qua M không vuông góc với OM. Chứng minh rằng AB < CD. (*Hướng dẫn :* Kẻ OI vuông góc CD, OI < OM).

2. Cho tam giác ABC, các đường cao BH và CK. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

b) HK < BC.

3. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

a) Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) So sánh độ dài AC và BD.

Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

4. Cho đường tròn đường kính AB và dây EF không cắt đường kính. Gọi I và J lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến EF. Chứng minh IE = JF.

5. Cho đường tròn (O), bán kính OA = 3 cm. Dây BC của đường tròn vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài BC.

Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

6. Cho đường tròn tâm O, hai dây MN = PQ và hai đường thẳng MN, PQ cắt nhau tại A ở ngoài đường tròn (N nằm giữa M và A, Q nằm giữa P và A). Chứng minh AM = AP và AN = AQ.

7. Cho đường tròn tâm O, hai dây CD và EF bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Biết IC = 2 cm, ID = 4 cm. Tính khoảng cách từ O đến dây EF.

8. Cho đường tròn (O) và hai dây AB và CD sao cho AB < CD. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm K nằm ngoài đường tròn. Đường tròn tâm O, bán kính OK cắt hai tia KA và KC lần lượt tại M và N. Chứng minh KM < KN.

LUYỆN TẬP

1. Cho đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Số đo các góc A, B, C tương ứng là 50°, 60°, 70°. Từ O kẻ các đường thẳng OM, ON, OP lần lượt vuông góc với các dây BC, AC, AB tại M, N, P. So sánh các khoảng cách OM, ON và OP.

2. Cho đường tròn tâm O, bán kính 50 cm. Hai dây MN và PQ song song với nhau và có độ dài theo thứ tự là 80 cm và 96 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

3. Cho đường tròn (O). Bốn điểm A, C, B, D nằm trên đường tròn theo thứ tự chiều quay kim đồng hồ, sao cho AB = CD, AB và CD cắt nhau tại I.

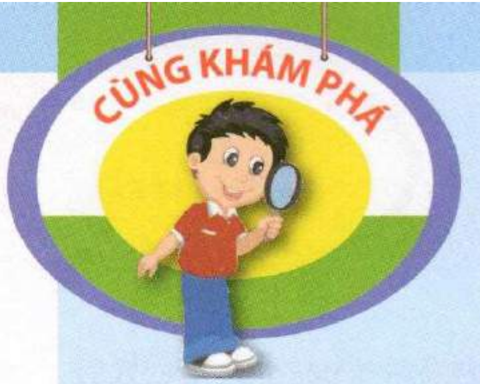
a) Chứng minh OI là phân giác của góc AID.

b) Chứng minh IB = IC ; IA = ID.

4. Cho đường tròn tâm O bán kính 10 cm. Điểm M cách điểm O 6 cm.

a) Vẽ và tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.

b) Vẽ và tính độ dài dây dài nhất đi qua M.



MIẾNG CHOCOLATE LỚN NHẤT

Bạn Toàn cứ thắc mắc, hình tròn có điều gì đặc biệt ngoài những định lí, định nghĩa, bài tập đã học. Nhân ngày Nhà Giáo Việt Nam 20/11, Toàn và các bạn tới thăm thầy giáo môn Toán, đem câu chuyện ra hỏi thầy.

Thay câu trả lời, thầy lấy ra một sợi chỉ và một thỏi chocolate lớn, rồi đặt câu hỏi :

"Với sợi chỉ như thế này, có cách nào để khoanh một diện tích chocolate lớn nhất ?"

Em nào tìm được đáp án thầy sẽ thưởng thỏi chocolate này.

Có bạn nói : "Phải là hình vuông."

Một bạn khác : "Phải là hình tam giác đều."

Tí lại bảo : "Hình ngôi sao năm cánh."

Bạn Minh dự đoán : "Em nghĩ là hình tròn."

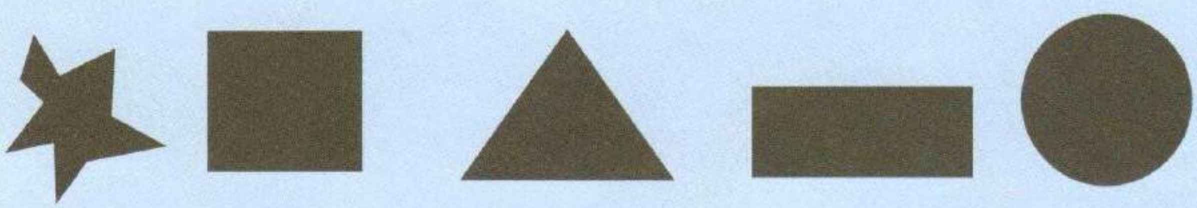
Thầy trả lời: "Đúng là hình tròn".

Người ta chứng minh được bài toán sau đây :

Trong tất cả các hình có cùng chu vi, hình tròn có diện tích lớn nhất.

Cách chứng minh bài toán này khá dài.

Các em yêu toán, muốn tìm hiểu tường tận có thể tìm đọc tác phẩm "Các bài giảng về Toán cho Mirella", quyển 1 của GS. Nguyễn Tiến Dũng.



CHỦ ĐỀ 7

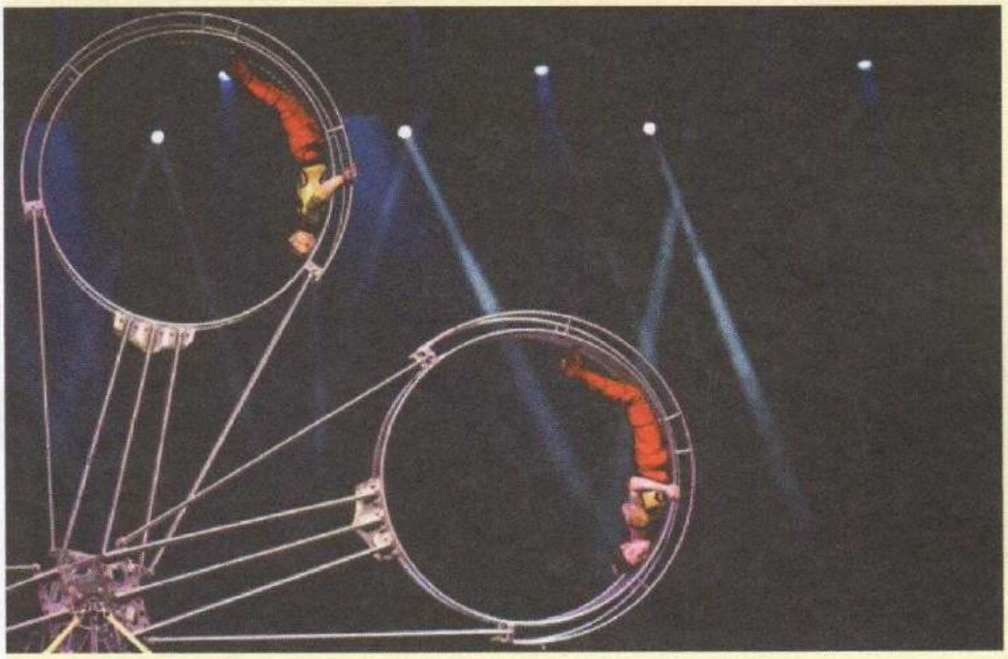
ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn

Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Vị trí tương đối của hai đường tròn



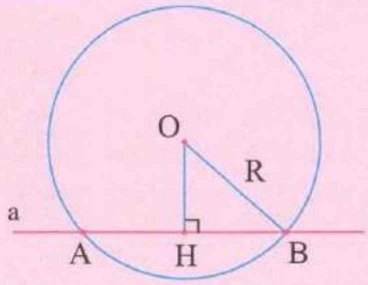
Hình ảnh đường thẳng và đường tròn trong rạp xiếc.

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

◆ Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Hoạt động 1 Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng a cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Gọi H là chân của đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng a.

Hãy so sánh OH với R.

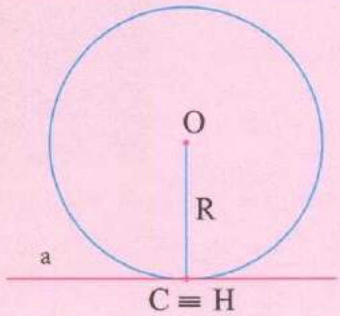


Khi đường thẳng a và đường tròn (O) có hai điểm chung, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *cắt nhau*. Đường thẳng a được gọi là *cát tuyến* của đường tròn (O). Khi đó OH < R.

◆ Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Hình bên cho ta hình ảnh của đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.

Hoạt động 2 Quan sát hình bên, hãy tìm số điểm chung giữa đường thẳng a và đường tròn (O ; R) rồi so sánh OH với R (với C là tiếp điểm và H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng a).



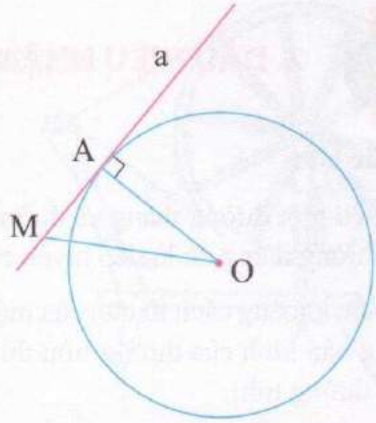
Khi đường thẳng a và đường tròn (O) chỉ có một điểm chung C, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *tiếp xúc* nhau. Khi đó, đường thẳng a được gọi là *tiếp tuyến* của đường tròn (O), điểm C gọi là *tiếp điểm*, khi đó H trùng với C và OH = R.

Định lí 1

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Ví dụ : Cho đường tròn (O ; 4 cm), a là tiếp tuyến với (O) tại A. M là một điểm trên a sao cho AM = 3 cm. Tính OM.

Giải :



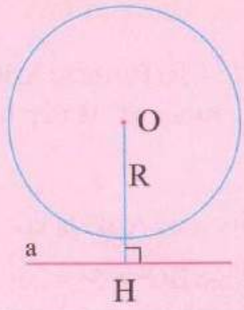
Do a là tiếp tuyến với (O) tại A nên $a \perp OA$.

Tam giác OAM vuông tại A nên :

$$OM = \sqrt{MA^2 + OA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}.$$

◆ Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

Hoạt động 3 Quan sát hình bên hãy tìm số điểm chung giữa đường thẳng a và đường tròn (O ; R) và so sánh OH với R.



Khi đường thẳng a và đường tròn (O) không có điểm chung, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *không giao nhau*. Khi đó OH > R.

◆ Hệ thức giữa khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính của đường tròn

Hoạt động 4 Gọi d là khoảng cách từ tâm đường tròn (O ; R) đến đường thẳng a. Hãy điền vào bảng tóm tắt sau :

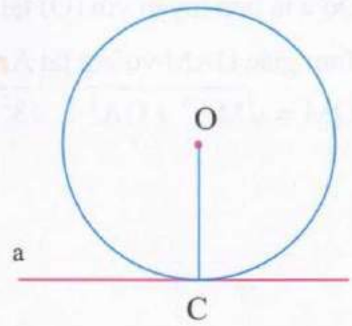
Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau		
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau		
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau		

THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3 cm, AC = 4 cm. Từ C làm tâm vẽ các đường tròn (C ; 3 cm), (C ; 4 cm) và (C ; 5 cm). Hãy xét mối quan hệ của AB với mỗi đường tròn trên.

2. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Nhắc lại :

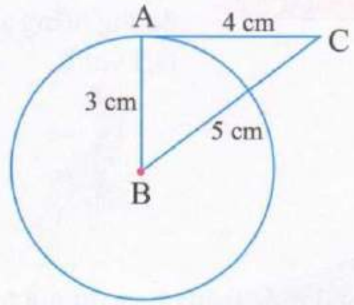


a) Nếu một đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Nếu khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

Định lí 2

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có AB = 3 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B ; 3 cm).

Giải :

Xét tam giác ABC ta có : $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

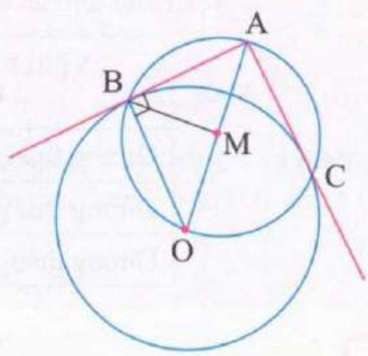
Mặt khác $BC^2 = 5^2 = 25$.

Suy ra $AB^2 + AC^2 = BC^2$, nên tam giác ABC vuông tại A.

Vậy A là một điểm của đường tròn (B ; 3 cm), AC là đường thẳng vuông góc với bán kính nên AC là tiếp tuyến của đường tròn (B ; 3 cm).

THỬ TÀI BẠN

Cho đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác đều ABC, AH là đường cao. Hãy vẽ tiếp tuyến của đường tròn tại A.



Ví dụ 2 : Cho đường tròn (O), A là một điểm nằm ngoài đường tròn, M là trung điểm của OA. Đường tròn tâm M bán kính MO cắt đường tròn (O) tại B và C. Chứng minh AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải :

Ta có MO = MA = MB suy ra tam giác BAO vuông tại B.

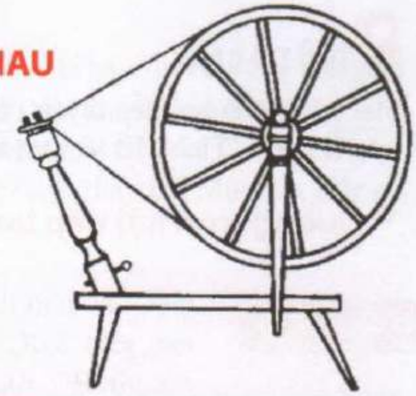
Vì vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Chứng minh tương tự ta cũng có AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

THỬ TÀI BẠN

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; 5cm). Hãy vẽ hai tiếp tuyến AB và AC.

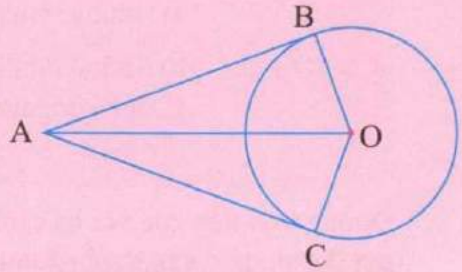
3. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU



◆ Định lí về hai tiếp tuyến cắt nhau

Xa quay tay để kéo sợi ngày xưa cho ta hình ảnh hai tiếp tuyến cắt nhau.

Hoạt động 5 AB và AC là hai tiếp tuyến vẽ từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Hãy điền vào chỗ trống sau :



Xét tam giác OAB và tam giác OAC, ta có :

$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \square$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính tại tiếp điểm).

$OB = \square$ (bán kính), OA chung.

Vậy $\Delta OAB = \Delta OAC$.

Từ đó suy ra :

$AB = \square$, $\widehat{AOB} = \square$ và $\widehat{BAO} = \square$.

Định lí 3

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

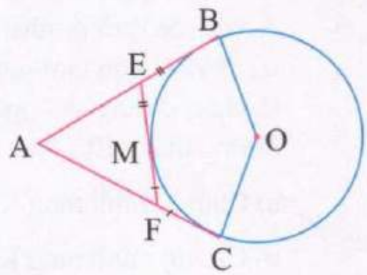
– Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

– Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

– Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

Ví dụ : Cho AB và AC là hai tiếp tuyến vẽ từ điểm A với đường tròn (O ; R). Qua điểm M nằm trên đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến với (O) như hình vẽ cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng chu vi tam giác AEF bằng 2AB.

Giải :



Vì EM và EB là tiếp tuyến nên EM = EB (1)

Vì FM và FC là tiếp tuyến nên FM = FC (2)

Chu vi $(\Delta AEF) = AE + EM + MF + FA$ (3)

Thế (1) và (2) vào (3), ta có :

Chu vi $(\Delta AEF) = AB + AC$.

Do AB = AC nên chu vi $(\Delta AEF) = 2AB$.

THỬ TÀI BẠN

MA và MB là hai tiếp tuyến vẽ từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Cho biết MA = 5 cm ; $\widehat{MOB} = 60^\circ$. Tính MB và $\widehat{OMA}$.

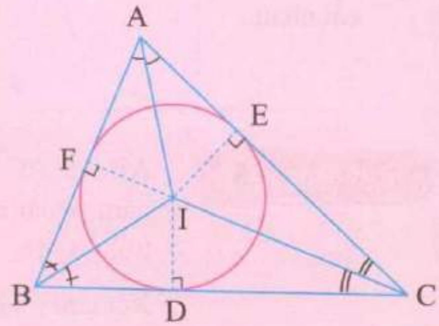
◆ Đường tròn nội tiếp tam giác

Hoạt động 6

Gọi I là giao điểm ba đường phân giác trong tam giác ABC. Vẽ ID, IE, IF lần lượt vuông góc với BC, AC và AB.

a) Chứng minh rằng IE = IF.

b) Chứng minh rằng IE = ID. Suy ra ba điểm D, E và F cùng nằm trên đường tròn (I ; ID).



Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác gọi là ***đường tròn nội tiếp tam giác***, còn tam giác gọi là ***tam giác ngoại tiếp*** đường tròn.

Trong hình ở hoạt động 6, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm các đường phân giác của các góc trong của tam giác.

Ví dụ : Cho tam giác đều ABC cạnh 2 cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác.

Giải :

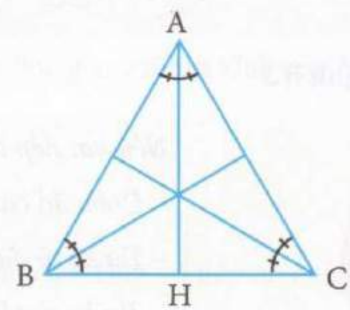
Vì ABC là tam giác đều nên giao điểm của ba đường phân giác cũng là giao điểm của ba đường trung tuyến, ba đường cao.

Vì vậy $r = \frac{1}{3}AH$ (H là chân đường cao hạ từ A).

Tam giác vuông ABH có AB = 2 cm, HB = 1 cm,

nên $AH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ (cm).

Suy ra $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.



THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 2 cm. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác.

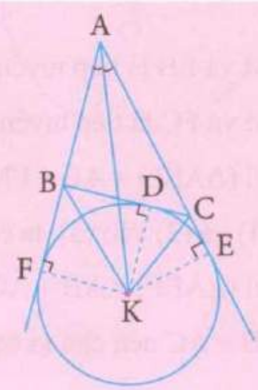
◆ Đường tròn bàng tiếp tam giác

Hoạt động 7

Gọi K là giao điểm đường phân giác của góc A với các đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C của tam giác ABC. D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ K xuống các đường thẳng BC, AC, AB.

a) Chứng minh rằng KD = KF.

b) Chứng minh rằng KD = KE. Suy ra ba điểm D, E và F cùng nằm trên một đường tròn.



Đường tròn tiếp xúc với một cạnh và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia của tam giác gọi là ***đường tròn bàng tiếp tam giác***. Trong hình ở hoạt động 7, tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác góc ngoài tại B (hay C). Một tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.

THỬ TÀI BẠN

1. Hình vẽ ở hoạt động 7 là đường tròn bàng tiếp trong góc A. Hãy vẽ đường tròn bàng tiếp trong góc B.

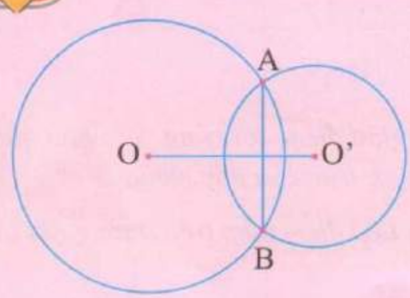
2. Cho tam giác đều ABC cạnh a, vẽ đường tròn bàng tiếp góc A, và tính bán kính của nó theo a.

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

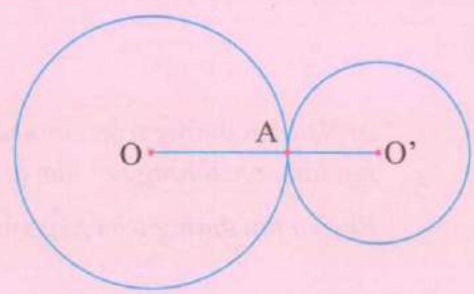
Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

Quan sát bộ cồng chiêng của các dân tộc ở Tây Nguyên ở hình bên, những cái chiêng cho ta hình ảnh của các đường tròn.

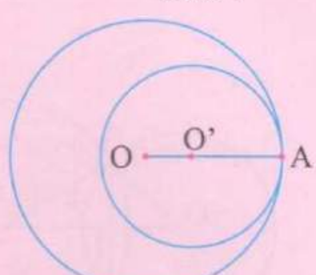
Hoạt động 8 Hãy liệt kê số điểm chung của các cặp đường tròn dưới đây



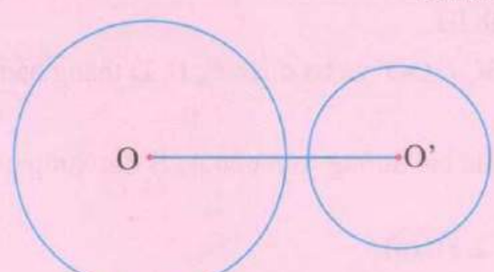
Hình 1



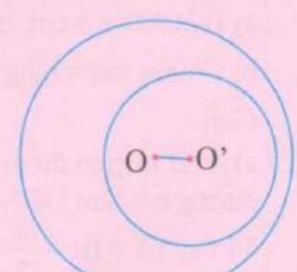
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

Hai đường tròn có hai điểm chung gọi là hai đường tròn *cắt nhau*. Hai điểm chung đó gọi là *giao điểm*. Đoạn thẳng nối hai điểm chung đó được gọi là *dây chung*.

Hai đường tròn chỉ có một điểm chung gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*.

Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn *không giao nhau*.

◆ Tính chất đường nối tâm

Cho hai đường tròn (O) và (O') có tâm không trùng nhau. Đường thẳng OO' gọi là đường nối tâm, đoạn thẳng OO' gọi là đoạn nối tâm. Do đường kính là trục đối xứng của mỗi đường tròn nên đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm hai đường tròn đó.

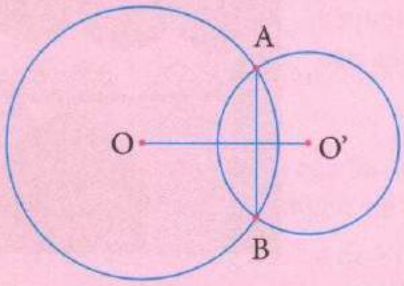
Hoạt động 9

a) Quan sát hình 6 rồi điền vào các ô trống sau :

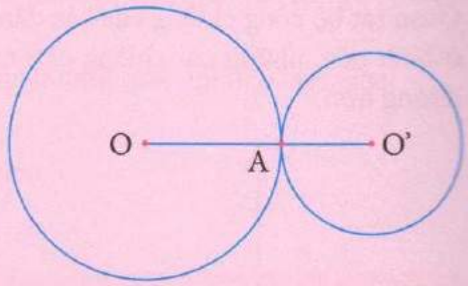
OA = ☐ ; O'A = ☐.

OO' là đường trung trực của đoạn thẳng ☐.

b) Quan sát hình 7 rồi dự đoán vị trí của tiếp điểm A với đường nối tâm OO'.



Hình 6



Hình 7

Định lí 4

a) Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

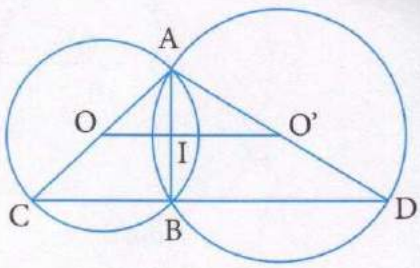
b) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Ví dụ : Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. I là giao điểm của AB và OO'.

a) Biết AB = 5 cm, tính IB.

b) Chứng minh rằng BC // OO' và ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Giải :



a) A, B là giao điểm của hai đường tròn nên A, B đối xứng qua đường nối tâm OO'.

Vì vậy $IA = IB = \frac{5}{2} = 2,5(\text{cm})$.

b) Do OA = OC (bán kính) và IA = IB nên OI là đường trung bình của tam giác ACB.

Suy ra BC // OI.

Do đó BC // OO' (1)

Chứng minh tương tự O'I cũng là đường trung bình của tam giác ADB nên BD // IO'.

Do đó BD // OO' (2)

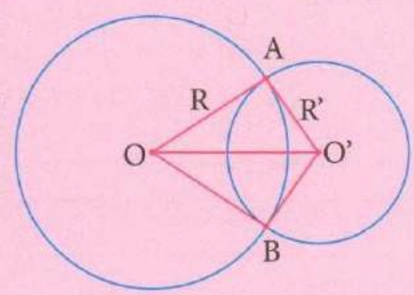
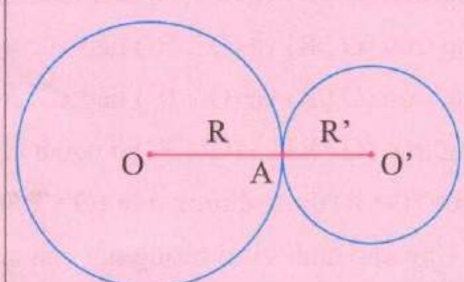
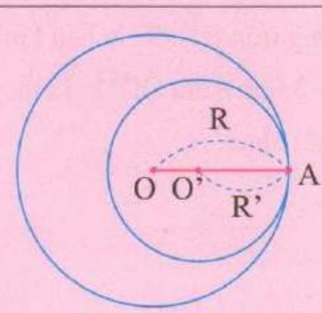
Từ (1) và (2) suy ra C, B, D thẳng hàng.

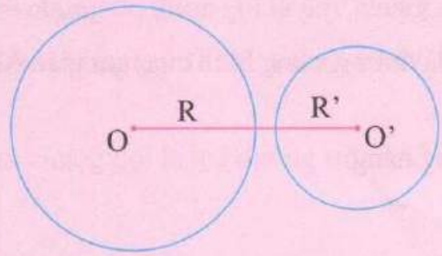
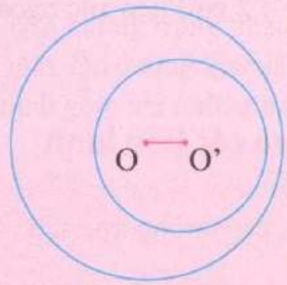
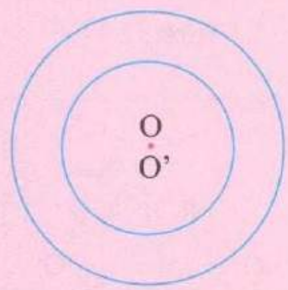
THỬ TÀI BẠN

Cho hai đường tròn (O ; 3 cm) và (O' ; 2 cm) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Chứng minh O, A, O' thẳng hàng và tính OO'.

◆ Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính

Hoạt động 10 Quan sát vị trí của các cặp đường tròn sau và điền vào chỗ trống.

Vị trí tương đối giữa hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') (R ≥ R')	Hình vẽ	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và R'
Hai đường tròn cắt nhau			
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài			
Hai đường tròn tiếp xúc trong			

<table>
<tr><td>(O) và (O’) ở ngoài nhau</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(O) đựng (O’)</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(O) và (O’) đồng tâm
(O ≡ O’)</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tóm lại :

– Nếu hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; R’) cắt nhau thì $R - R' < OO' < R + R'$;

– Nếu hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; R’) tiếp xúc ngoài thì $OO' = R + R'$;

– Nếu hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; R’) tiếp xúc trong thì $OO' = R - R' > 0$;

– Nếu hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; R’) ở ngoài nhau thì $OO' > R + R'$;

– Nếu đường tròn (O ; R) đựng đường tròn (O’ ; R’) thì $OO' < R - R'$.

Ví dụ : Cho đoạn OO’ = 5 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O ; 2 cm) và (O’ ; 1 cm).

Giải : Gọi R là bán kính đường tròn (O), R’ là bán kính đường tròn (O’).

Ta có $R + R' = 2 + 1 = 3$ (cm), mà OO’ = 5 cm, nên $R + R' < OO'$.

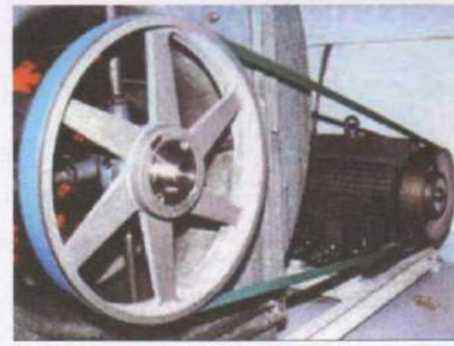
Vậy (O) và (O’) ở ngoài nhau.

THỬ TÀI BẠN

Cho đoạn AB = 7 cm.

Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (A ; 3 cm) và (B ; 4 cm).

◆ Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

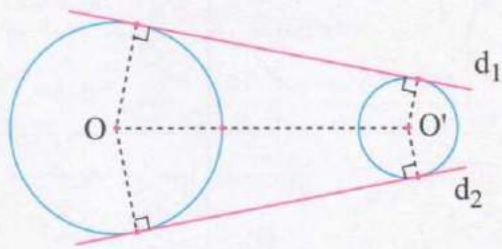


Hai dây cuaroa và hai bánh chuyền là hình ảnh của tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

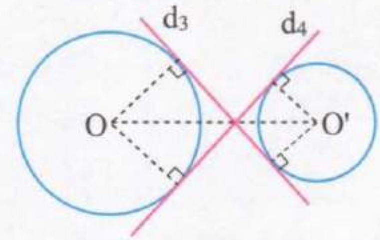
Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Hai tiếp tuyến d_1 và d_2 ở hình 8 gọi là hai ***tiếp tuyến chung ngoài*** của hai đường tròn (O) và (O') (tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn nối tâm).

Hai tiếp tuyến d_3 và d_4 ở hình 9 gọi là hai ***tiếp tuyến chung trong*** của hai đường tròn (O) và (O') (tiếp tuyến chung trong cắt đoạn nối tâm).

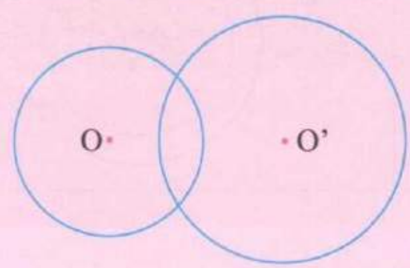
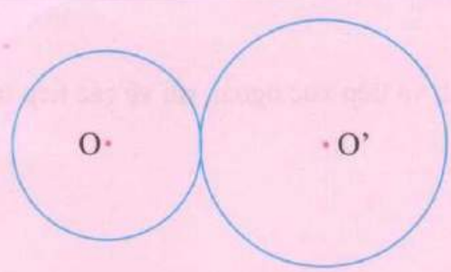


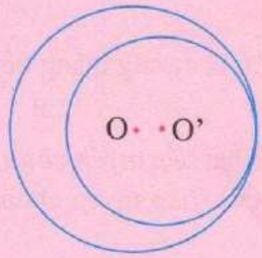
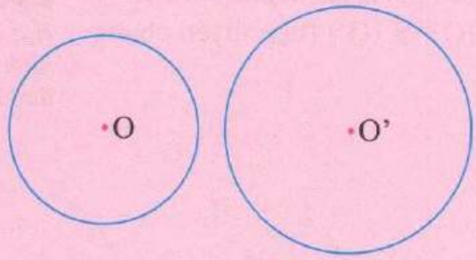
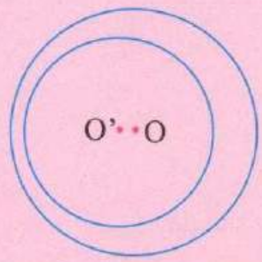
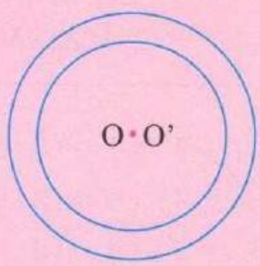
Hình 8



Hình 9

Hoạt động 11 Điền vào chỗ trống sau đây :

Vị trí tương đối giữa hai đường tròn (O) và (O')	Hình vẽ	Số tiếp tuyến chung
Hai đường tròn cắt nhau		
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài		

Hai đường tròn tiếp xúc trong		
(O) và (O') ở ngoài nhau		
(O) đựng (O')		
(O) và (O') đồng tâm (O ≡ O')		

THỬ TÀI BẠN

Vẽ hai đường tròn bằng nhau và tiếp xúc ngoài, rồi vẽ các tiếp tuyến chung của chúng.

GHI NHỚ

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.
- Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

  + Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

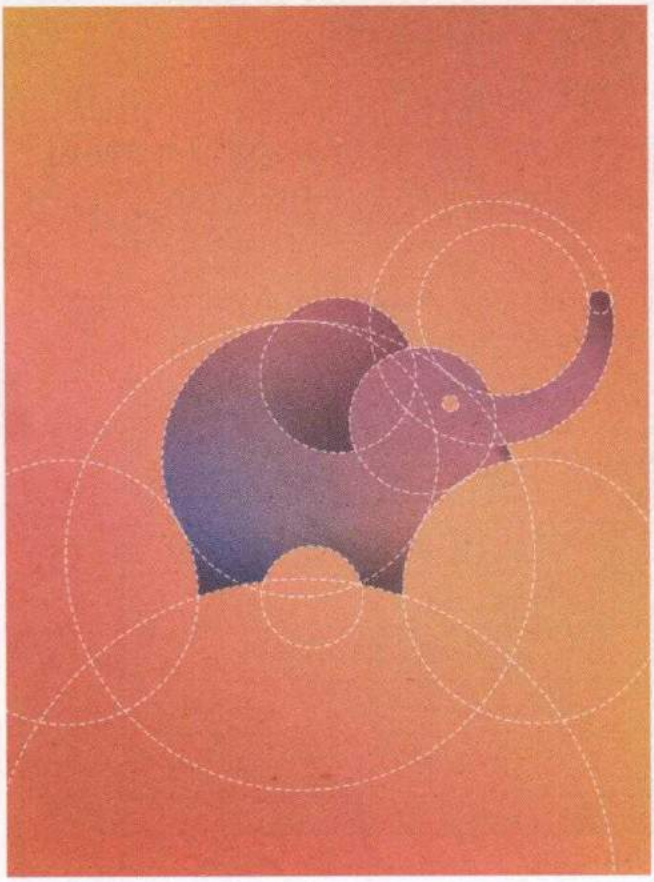
  + Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

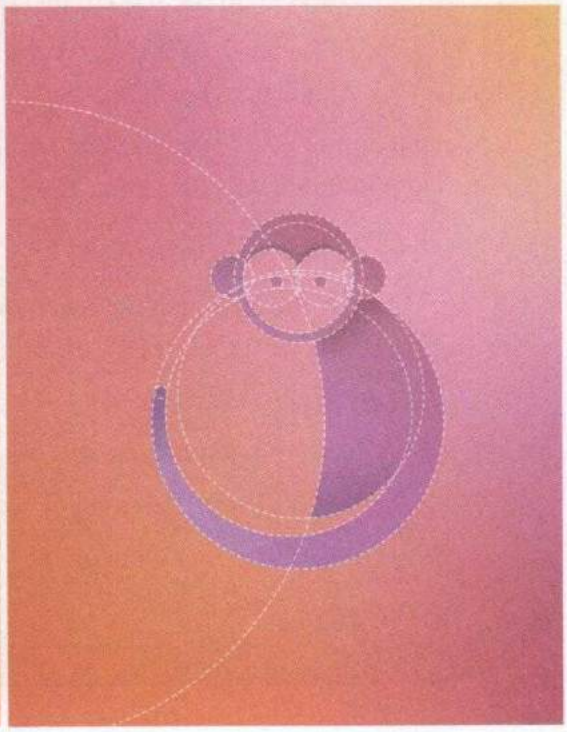
  + Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Vị trí tương đối giữa hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') ($R \geq R'$)	Hệ thức giữa OO' với R và R'
(O) và (O') cắt nhau	$R - R' < OO' < R + R'$
(O) và (O') tiếp xúc ngoài	$OO' = R + R'$
(O) và (O') tiếp xúc trong	$OO' = R - R' > 0$
(O) và (O') ở ngoài nhau	$OO' > R + R'$
(O) đựng (O')	$OO' < R - R'$

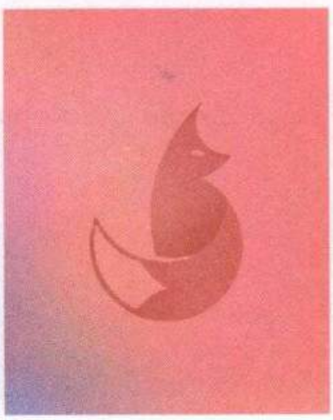
VẼ CON VẬT BẰNG 13 HÌNH TRÒN

Cô Dorota Pankowska, người Canada, đã vẽ các con vật ngộ nghĩnh chỉ bằng 13 đường tròn. Bí quyết ở đây là xác định tâm và bán kính của đường tròn để tạo ra các hình như mong muốn.





a) Dưới đây là một số hình con vật khác (không có các chấm hình tròn)

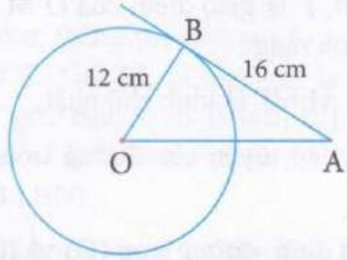


b) Các em hãy tự mình dùng các đường tròn để tạo ra tác phẩm của riêng mình nhé !

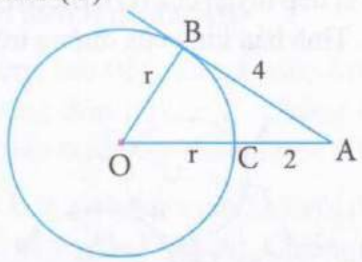
BÀI TẬP

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

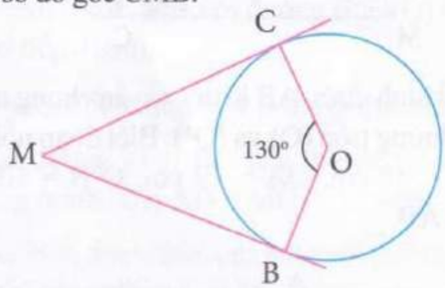
1. Ở hình dưới, cho biết AB là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO.



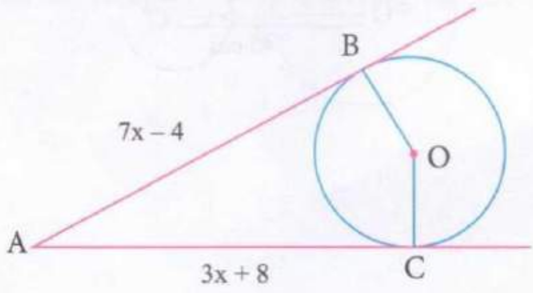
2. Ở hình dưới, cho biết AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B. Tính bán kính r của đường tròn (O).



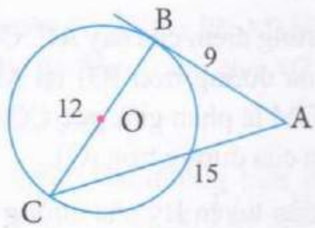
3. Ở hình dưới, biết MB, MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C, $\overset{\frown}{COB} = 130^\circ$. Tính số đo góc CMB.



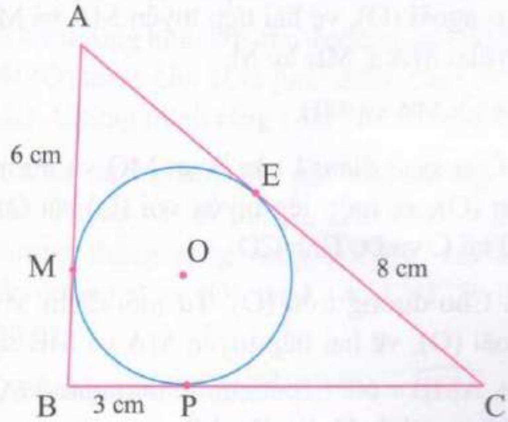
4. Ở hình dưới, cho biết AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C. Tính x.



5. Ở hình dưới, biết AB = 9, BC = 12, AC = 15 và BC là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



6. Ở hình dưới, cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC và AM = 6 cm, BP = 3 cm, CE = 8 cm. Tính chu vi tam giác ABC.



7. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

8. Cho đường tròn (O ; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho AC = R. Gọi I là trung điểm của dây AC. OI cắt tiếp tuyến Ax tại M. Chứng minh rằng :

a) Góc ACB bằng 90° suy ra độ dài BC.

b) OM là phân giác góc COA.

c) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

9. Cho tam giác ABC vuông ở A có AB = 8, AC = 15. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD, cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài HE.

10. Cho đường tròn (O ; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho AC = R.

a) Chứng minh rằng góc ACB bằng 90^o, suy ra độ dài BC.

b) Gọi I là trung điểm của dây AC. OI cắt tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng OM là phân giác góc COA và MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) MC cắt tiếp tuyến By của đường tròn (O) tại N. Chứng minh rằng : MN = AM + BN và số đo góc MON bằng 90^o.

11. Cho đường tròn (O ; 5 cm). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho $MA \perp MB$ tại M.

a) Tính MA và MB.

b) Qua giao điểm I của đoạn MO và đường tròn (O), vẽ một tiếp tuyến với (O) cắt OA, OB tại C và D. Tính CD.

12. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho $\widehat{AMB} = 60^o$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm, tính độ dài dây AB.

Vị trí tương đối của hai đường tròn

13. Cho ba đường tròn (O ; R), (O' ; R') và (O" ; R") đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính R, R' và R" biết OO' = 5 cm, OO" = 6 cm và O'O" = 7 cm.

14. Cho hai đường tròn (O ; 5 cm) và (O' ; 5 cm) cắt nhau tại A và B. Tính độ dài dây chung AB biết OO' = 8 cm.

15. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') cắt nhau tại A và B với R > R'. Vẽ các đường kính AOC và AO'D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

16. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến chung MAN sao cho MA = AN. Đường vuông góc với MN tại A cắt OO' tại I. Chứng minh I là trung điểm của OO'.

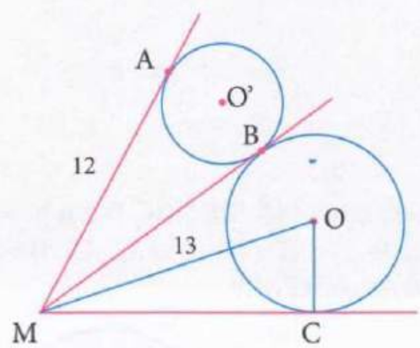
17. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại A. Gọi M là giao điểm của một trong hai tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O)$, $C \in (O')$) và tiếp tuyến chung trong tại A. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO' tại M.

18. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC tại M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh rằng :

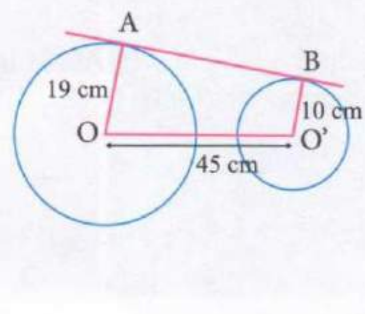
a) Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.

b) OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

19. Ở hình dưới, đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại B ; MB là tiếp tuyến chung trong của (O) và (O'), MA là tiếp tuyến của (O'), MC là tiếp tuyến của (O). Biết MA = 12, MO = 13. Tính bán kính của đường tròn (O).



20. Ở hình dưới, AB là tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn (O) và (O'). Biết đoạn nối tâm OO' = 45 cm, OA = 19 cm, O'B = 10 cm. Tính AB.



LUYỆN TẬP

1. Cho đường tròn (O ; R), đường kính AB = 2R. Lấy điểm C trên đường tròn sao cho CA < CB. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông và $CD^2 = 4HA.HB$.

b) Đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (d). Xét vị trí tương đối của đường tròn (A ; AM) và đường tròn (B ; BN).

2. Từ điểm A ngoài đường tròn (O ; R) sao cho OA = 2R vẽ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính theo R độ dài AB.

b) Đường cao BH của tam giác ABO kéo dài cắt đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Gọi E là giao điểm của OA với đường tròn (O) (E nằm giữa O và A). Chứng minh rằng E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

3. Từ điểm M ngoài đường tròn (O ; R) kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng OM là trung trực của AB.

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh rằng AD // MO.

c) Gọi N là giao điểm của MO với đường tròn (O) (N nằm giữa M và O). Đường thẳng BN cắt đường thẳng DA tại E. Gọi K là giao điểm của AB với DN. Chứng minh rằng $EK \perp DB$.

4. Cho đường tròn (O ; R), AB là đường kính. Trên (O) lấy điểm C sao cho AC = R.

a) Tính BC theo R.

b) Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng AB tại M. Lấy trên (O) điểm D sao cho MD = MC. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Chứng minh rằng $MC^2 = MA \cdot MB$.

d) Kẻ đường kính DE của đường tròn (O), ME cắt (O) tại F. Gọi H là giao điểm của CD với MO. Chứng minh rằng : MF.ME = MH.MO.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có AB là đường kính (AC < BC). Đường thẳng song song với AC vẽ từ O cắt đường tròn (O) tại I (A, C, I, B theo thứ tự).

a) Chứng minh rằng $OI \perp BC$.

b) Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt đường thẳng OI tại M. Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của (O).

c) Kẻ CH vuông góc với AB tại H, gọi K là giao điểm của AM với CH. Chứng minh rằng K là trung điểm của CH.

6. Cho đường tròn (O) đường kính BC = 2R. Lấy điểm A thuộc đường tròn sao cho AB < AC. Tiếp tuyến tại A cắt tiếp tuyến tại B và C của đường tròn tại E và F.

a) Chứng minh rằng EF = EB + FC.

b) Chứng minh rằng $BE.CF = R^2$.

c) Gọi M là giao điểm của EC và BF. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Chứng minh rằng ba điểm A, M, H thẳng hàng.

d) Trường hợp cho AB = R, chứng minh rằng tam giác AFC đều, tính theo R diện tích tam giác AFC.

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

1. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có AH là đường cao. Lần lượt vẽ đường tròn (O) đường kính BH và đường tròn (O') đường kính HC.

a) Xét vị trí tương đối của đường tròn (O) và (O').

b) Đường tròn (O) cắt AB tại E, đường tròn (O') cắt AC tại F. Chứng minh rằng tứ giác AEHF là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến chung của đường tròn (O) và (O').

d) Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt EF tại N. Cho biết AB = 6 cm, AC = 8 cm. Tính diện tích tam giác ANF.

2. Trên đường thẳng xy, lấy lần lượt ba điểm A, B, C sao cho AB > BC. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính BC.

a) Chứng minh rằng đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại B.

b) Vẽ dây DE vuông góc với AC tại H là trung điểm của AC. Chứng minh tứ giác ADCE là hình thoi.

c) DC cắt đường tròn (O') tại F. Chứng minh rằng ba điểm F, B, E thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng HF là tiếp tuyến của đường tròn (O').

3. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Vẽ dây DE vuông góc với AO tại I là trung điểm của AO.

a) Chứng minh rằng tam giác ADB vuông. Tính AD, DB theo R.

b) Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại D cắt đường thẳng AB tại M. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Chứng minh rằng : MA.MB = MI.MO.

d) Trên đường tròn (O) lấy điểm N (N nằm trên nửa mặt phẳng bờ DE chứa điểm A và N ≠ A). Tiếp tuyến với (O) tại N cắt MD ở P và cắt ME ở Q. Trường hợp cho $\widehat{DME} = 60^\circ$, tính theo R chu vi tam giác MPQ.

4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB tại E và cắt AC tại F. Gọi H là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh rằng OI ⊥ EF.

c) Gọi D là giao điểm của AH với BC. Chứng minh rằng :

HA.HD = HB.HF = HC. HE

d) Chứng minh rằng IF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

e) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

5. Từ điểm A ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính CD của (O).

a) Chứng minh rằng BD // AO.

b) AD cắt đường tròn (O) tại E (A, E, D theo thứ tự).

Chứng minh rằng AB^2 = AE.AD.

c) Vẽ BH ⊥ DC tại H. Gọi I là trung điểm của BH. Chứng minh rằng ba điểm A, I, D thẳng hàng.

6. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O ; R) vẽ tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MEF với (O) (A và B là hai tiếp điểm ; ME < MF ; tia MF nằm giữa hai tia MA, MO).

a) Chứng minh rằng OM là trung trực của AB.

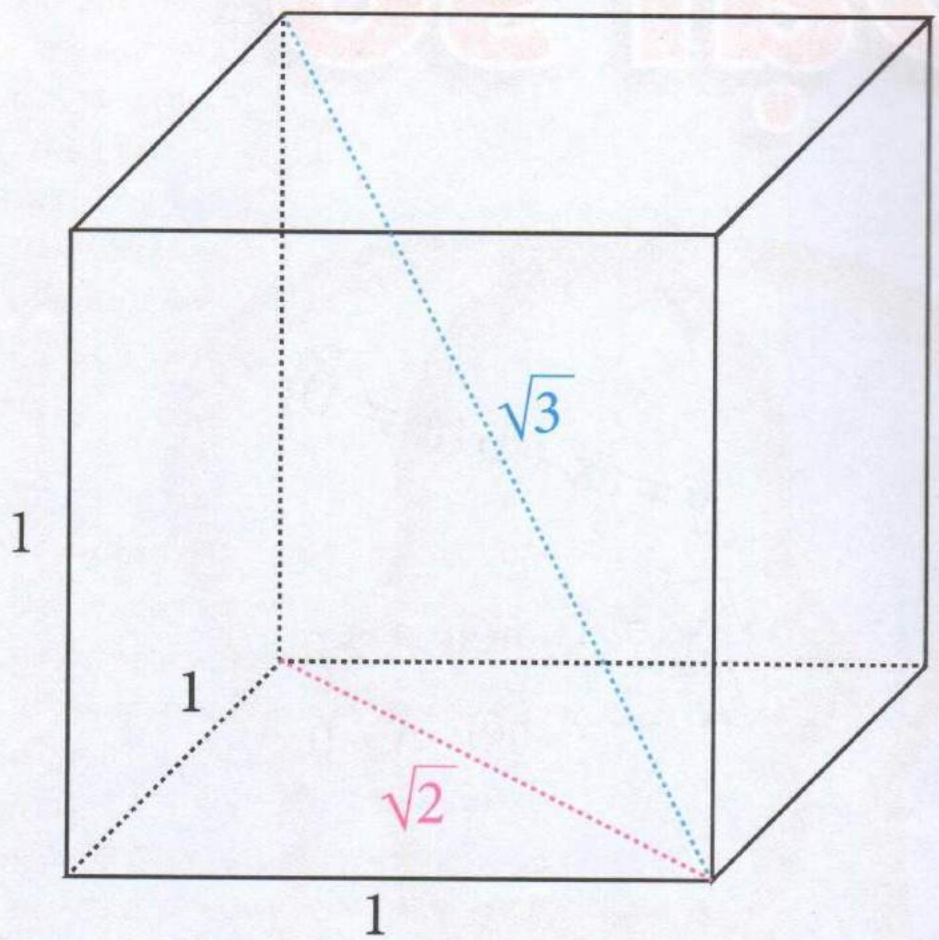
b) Gọi I là trung điểm của EF. Đường thẳng MA cắt đường thẳng OI tại D ; OA cắt MI tại K. Chứng minh rằng DK ⊥ MO.

c) Gọi H là giao điểm của AB với MI. Tính đoạn HI khi tam giác MAB đều và $OI = \dfrac{R}{2}$.

CHƯƠNG 1

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

- Các phép tính với căn bậc hai
- Biến đổi căn thức
- Căn bậc ba



Hình lập phương cạnh bằng 1 có độ dài đường chéo một mặt là $\sqrt{2}$, độ dài đường chéo của hình lập phương là $\sqrt{3}$.

CHỦ ĐỀ 1

CÁC PHÉP TÍNH VỚI CĂN BẬC HAI

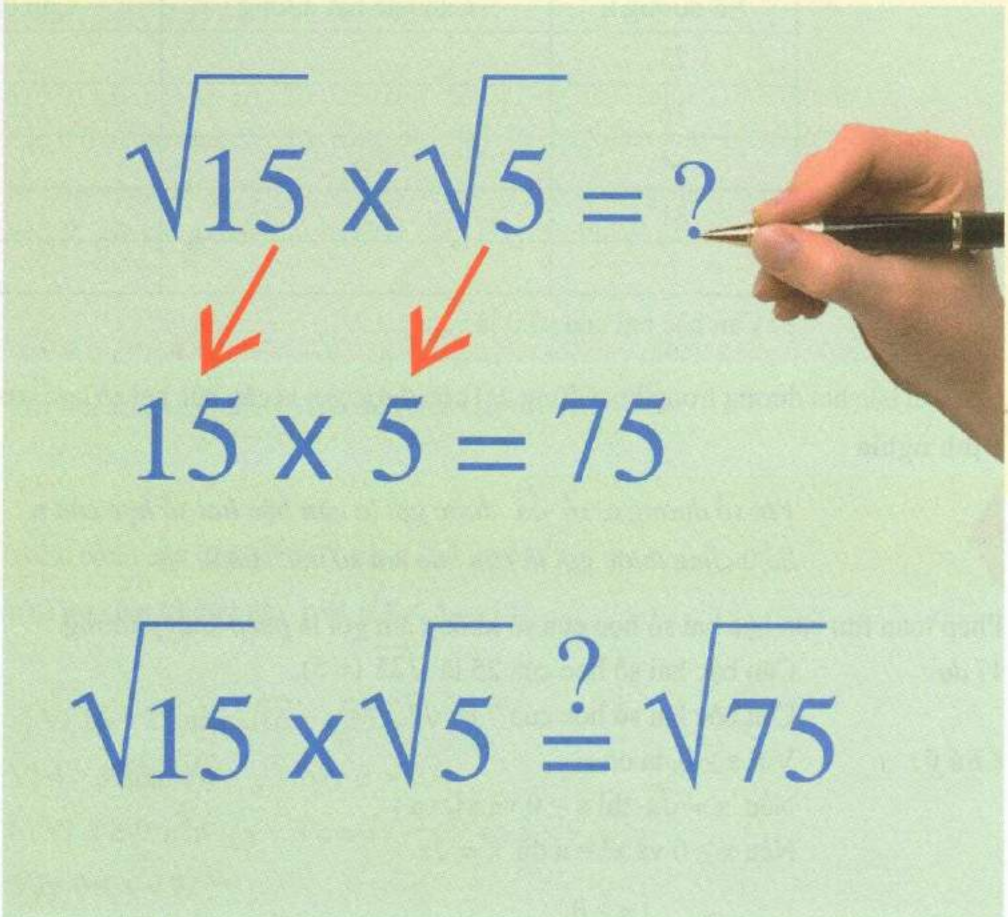
Căn bậc hai

Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

Tìm căn bậc hai số học bằng máy tính cầm tay



BÀI TẬP

Căn bậc hai

1. Tính căn bậc hai của các số sau :

a) 36 ; b) 81 ; c) 121 ;

d) 144 ; e) 0,16 ; f) 0,04.

2. Tính :

a) $\sqrt{8^2+6^2}$; b) $\sqrt{(0,3)^2}$;

c) $\sqrt{(-0,3)^2}$; d) $-0,2\sqrt{(-0,5)^2}$.

3. So sánh :

a) 3 và $\sqrt{8}$; b) 7 và $\sqrt{50}$;

c) $2+\sqrt{3}$ và $3+\sqrt{2}$.

4. Tìm x không âm, biết :

a) $\sqrt{x}=2$; b) $\sqrt{x}+1=5$;

c) $\sqrt{x-1}+1=4$; d) $\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$.

5. Tìm cạnh của một hình vuông có diện tích bằng diện tích của một hình chữ nhật có chiều dài là 10 m, chiều rộng là 6,4 m.

6. Tìm độ dài đường chéo của một hình vuông có cạnh là 5 cm.

Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$

7. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$; b) $\sqrt{-4a}$; c) $\sqrt{2-a}$; d) $\sqrt{2a+5}$?

8. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$; b) $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$;

c) $2\sqrt{a^2}$ với $a<0$; d) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a\geq 2$;

e) $\sqrt{(x-2)^2}-1$.

9. Chứng minh :

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-2$;

b) $(4-\sqrt{7})^2=23-8\sqrt{7}$;

c) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}-\sqrt{10}=-1$;

d) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

10. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{x^2}=5$; b) $\sqrt{x^2}=|-2|$;

c) $\sqrt{16x^2}=3$; d) $\sqrt{9x^2}=|-2|$.

Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

11. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính :

a) $\sqrt{16.9}$; b) $\sqrt{3^2.(-2)^4}$;

c) $\sqrt{160.2,5}$; d) $\sqrt{0,9.10^2.3,6}$.

12. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai để tính :

a) $\sqrt{3}.\sqrt{27}$; b) $\sqrt{4,9}.\sqrt{60}.\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{0,9}.\sqrt{6,4}$; d) $\sqrt{6,3}.\sqrt{6,4}.\sqrt{7}$.

13. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{4a^2}$ với $a\geq 0$;

b) $\sqrt{0,16(x-2)^2}$ với $x\geq 2$;

c) $\sqrt{25.(3-a)^2+3}$;

d) $\dfrac{1}{2(x-5)}\sqrt{36.(x-5)^2-5}$ với $x\neq 5$.

14. Rút gọn các biểu thức :

a) $\sqrt{\dfrac{4x}{9}}.\sqrt{\dfrac{3x}{4}}$ với $x\geq 0$;

b) $\sqrt{2x}.\sqrt{18x}$ với $x\geq 0$.

Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

15. Tính :

a) $\sqrt{\dfrac{49}{16}}$; b) $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$; c) $\sqrt{2\dfrac{14}{25}}$; d) $\sqrt{\dfrac{2,5}{3,6}}$.

16. Tính :

a) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{0,4}}{\sqrt{0,9}}$; c) $\dfrac{\sqrt{320}}{\sqrt{20}}$; d) $\dfrac{\sqrt{3^5.2^3}}{\sqrt{6^7}}$.

17. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{16}}$ với $x\geq 1$;

b) $\sqrt{\dfrac{x^4}{(a-1)^2}}$ với $a<1$.

18. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}}$ với $x\geq 5$;

b) $\dfrac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}}$ với $x<4$.

LUYỆN TẬP

1. Tìm điều kiện có nghĩa của các căn thức sau :

a) $\sqrt{2x-5}$; b) $\sqrt{2-3x}$;

c) $\sqrt{x}$; d) $\sqrt{-x}$;

e) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{5}}$; f) $\sqrt{\dfrac{2x-5}{-3}}$;

g) $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x+2}}$; h) $\sqrt{x^2+1}$.

2. Rút gọn :

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{8+\sqrt{60}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}$;

c) $\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

d) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$;

e) $(x-4)\sqrt{16-8x+x^2}$ với $x \geq 4$;

f) $(2x-5)\sqrt{\dfrac{2}{(2x-5)^2}}$ với $x \neq \dfrac{5}{2}$;

g) $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$.

3. Tìm x :

a) $\sqrt{2x-1}=5$;

b) $\sqrt{2x-1}=|-3|$;

c) $\sqrt{(2x-5)^2}=4$;

d) $\sqrt{(3x-2)^2}=|-2|$;

e) $\sqrt{(x-2)^2}=2x-1$.

4. Tính :

a) $\sqrt{0,09.64}$; b) $\sqrt{2^4.(-7)^2}$;

c) $\sqrt{12,1.360}$; d) $\sqrt{7}.\sqrt{63}$;

e) $\sqrt{2,5}.\sqrt{30}.\sqrt{48}$; f) $\sqrt{0,4}.\sqrt{6,4}$.

5. Rút gọn biểu thức :

a) $\sqrt{0,16x^2}$ với $x<0$;

b) $\sqrt{12.75(2-x)^2}$ với $x<2$;

c) $\sqrt{\dfrac{x}{15}}.\sqrt{\dfrac{5x}{3}}$ với $x>0$;

d) $\sqrt{3x}.\sqrt{\dfrac{12}{x}}$ với $x>0$.

6. Tính :

a) $\sqrt{\dfrac{20^2-16^2}{16}}$; b) $\sqrt{\dfrac{2\frac{1}{4}.1\frac{7}{9}}{3\frac{6}{25}}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{\sqrt{1\frac{11}{25}}}{\sqrt{2\frac{14}{25}}}$.

7. Tìm x :

a) $\sqrt{3}x=\sqrt{27}$;

b) $\sqrt{3}x-\sqrt{27}=\sqrt{12}-\sqrt{75}$;

c) $\sqrt{5}x^2-\sqrt{20}=0$;

d) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{3}}-\sqrt{12}=0$.

8. Cho biểu thức $A=\sqrt{x+2}.\sqrt{x-3}$

và $B=\sqrt{(x+2)(x-3)}$.

a) Tìm x để A và B có nghĩa.

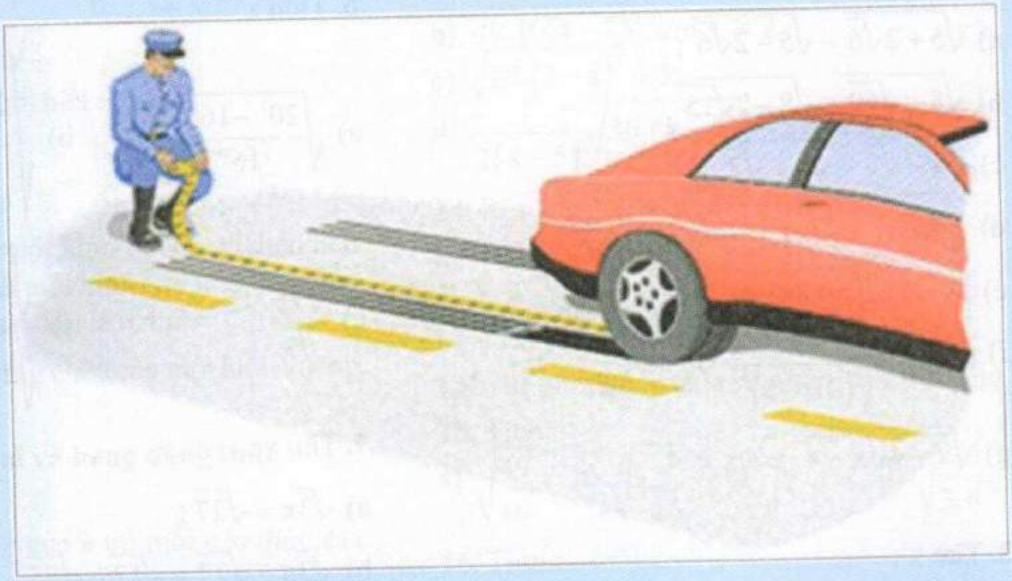
b) Với giá trị nào của x thì A = B ?

CÙNG KHÁM PHÁ

ƯỚC LƯỢNG TỐC ĐỘ XE TỪ CÁC VỤ VA CHẠM

Sau những vụ va chạm giữa các xe trên đường, cảnh sát thường sử dụng công thức dưới đây để ước lượng tốc độ s (đơn vị : dặm/giờ) của xe từ vết trượt trên mặt đường sau khi thắng đột ngột. Trong đó, d là chiều dài vết trượt của bánh xe trên nền đường tính bằng feet (ft), f là hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt đường (là thước đo sự "trơn trượt" của mặt đường).

$$s = \sqrt{30fd}$$



Bảng dưới đây đưa ra một số ước lượng điển hình cho hệ số ma sát f với các loại mặt đường khác nhau (nhựa đường, bê tông, sỏi) trong điều kiện khác nhau (khô, ẩm ướt).

	Nhựa đường	Bê tông	Sỏi
Khô	1,0	0,8	0,2
Ẩm ướt	0,5	0,4	0,1

Cao tốc Long Thành – Dầu Giây có tốc độ giới hạn là 100 km/h. Sau một vụ va chạm giữa hai xe, cảnh sát đo được vết trượt của một xe là d = 252 ft và hệ số ma sát mặt đường tại thời điểm đó là f = 0,7. Chủ xe đó nói ông không chạy quá tốc độ. Hãy áp dụng công thức trên để ước lượng tốc độ chiếc xe đó rồi so sánh với lời nói của người chủ xe.

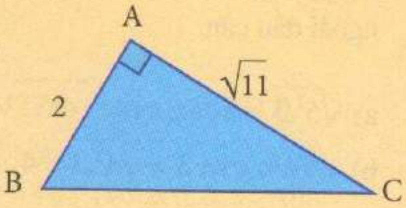
Biết 1 dặm = 1609 m, 1 ft = 0,3048 m.

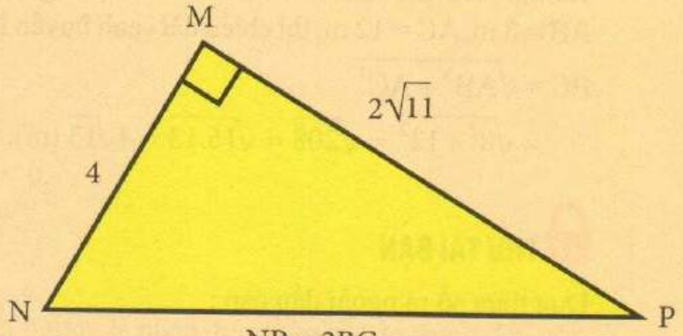
CHỦ ĐỀ 2

BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

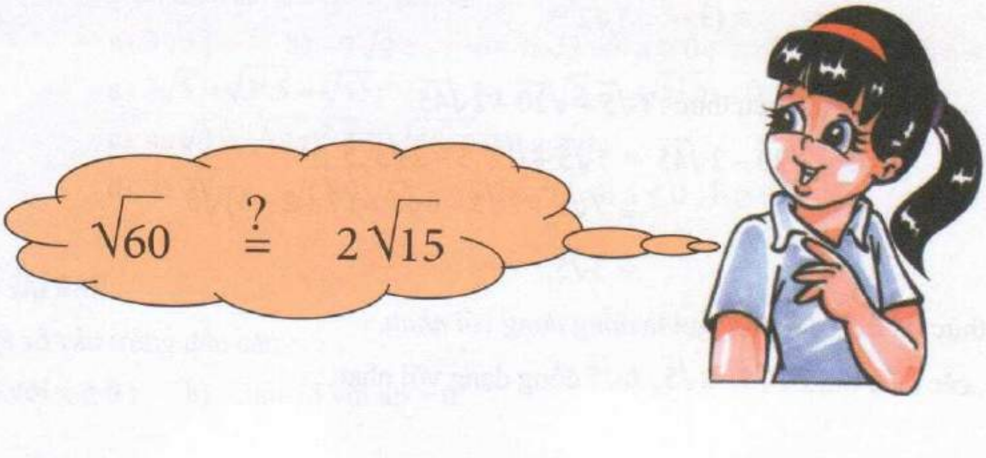




Ta có thể tính NP bằng hai cách :

$$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{11}\right)^2} = \sqrt{60}$$

$$NP = 2BC = 2\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{11}\right)^2} = 2\sqrt{15}$$



THỬ TÀI BẠN

Rút gọn : a) $2\sqrt{28}+3\sqrt{63}-2\sqrt{112}-\sqrt{175}$; b) $\sqrt{2}.\sqrt{7+3\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$;

c) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}$; d) $\sqrt{27b}+12\sqrt{\dfrac{1}{3}b}-\sqrt{48b}$ (b > 0).

GHI NHỚ

Đưa thừa số ra ngoài dấu căn	$\sqrt{A^2B}=A\sqrt{B}$ với $A\ge 0, B\ge 0$ $\sqrt{A^2B}=-A\sqrt{B}$ với $A<0, B\ge 0$
Đưa thừa số vào trong dấu căn	$A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ với $A\ge 0, B\ge 0$ $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$ với $A<0, B\ge 0$
Khử mẫu của biểu thức lấy căn	$\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{1}{\lvert B\rvert}\sqrt{AB}$ với $AB\ge 0, B\ne 0$
Trục căn thức ở mẫu	$\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ với $B>0$
	$\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\dfrac{C(\sqrt{A}\mp B)}{A-B^2}$ với $A\ge 0, A\ne B^2$
	$\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}$ với $A\ge 0, B\ge 0$ và $A\ne B$

BÀI TẬP

Đưa thừa số ra ngoài (vào trong) dấu căn

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a) $\sqrt{32}$; $2\sqrt{75}$; $3\sqrt{80}$; $\frac{5}{6}\sqrt{48}$; $\sqrt{108}$.

b) $\sqrt{63a^2}\ (a \geq 0)$; $2\sqrt{12ab^2}\ (a \geq 0, b < 0)$; $\sqrt{125a^2b^2}\ (ab \geq 0)$.

2. Rút gọn biểu thức :

a) $\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 4\sqrt{8}$;

b) $3\sqrt{27} + \sqrt{75} - 3\sqrt{48} - 4\sqrt{12}$;

c) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{108} + 3\sqrt{20} + 5\sqrt{27}$;

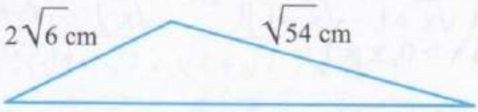
d) $8\sqrt{x^3y^2} - 3y\sqrt{x^3}\ (x \geq 0, y \geq 0)$.

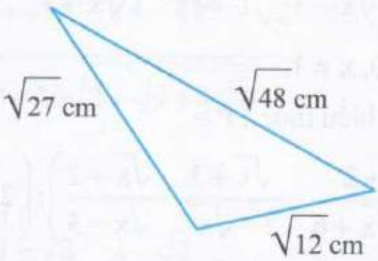
3. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

a) $3\sqrt{7}$; $-5\sqrt{3}$; $2\sqrt{a}\ (a \geq 0)$;

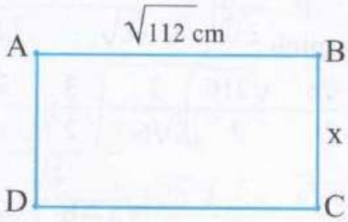
b) $a\sqrt{5}\ (a \geq 0)$; $a\sqrt{5}\ (a < 0)$.

4. a) Tính chu vi của các tam giác trong hình dưới đây :





b) Biết chu vi hình chữ nhật ABCD ở hình dưới bằng $12\sqrt{7}$ cm. Tìm x.



Khử mẫu của biểu thức lấy căn – Trục căn thức ở mẫu

5. Khử mẫu của biểu thức lấy căn :

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{\frac{16}{7}}$;

b) $a\sqrt{\frac{3}{a}}$; $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\sqrt{\frac{4a^3}{9b}}$; $5xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$

(giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa).

6. Trục căn thức ở mẫu (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

a) $\frac{7}{\sqrt{3}}$; $\frac{3}{2\sqrt{5}}$; $\frac{5}{3\sqrt{12}}$; $\frac{2}{3\sqrt{20}}$;

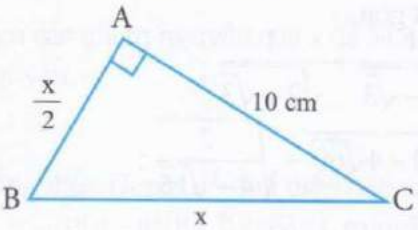
b) $\frac{\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}}$; $\frac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-1}$;

c) $\frac{5}{\sqrt{5}+2}$; $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$; $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$; $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$;

d) $\frac{y+a\sqrt{y}}{a\sqrt{y}}$; $\frac{b-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1}$;

e) $\frac{b}{5+\sqrt{b}}$; $\frac{p}{2\sqrt{p}-1}$; $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A ở hình dưới. Tính độ dài x của cạnh huyền BC.



8. Tính :

a) $\frac{1}{2-\sqrt{5}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$;

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{12}{3-\sqrt{3}}$;

d) $\left(2+\dfrac{\sqrt{5}-5}{1-\sqrt{5}}\right)\left(2-\dfrac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+1}\right)$.

Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

9. Rút gọn :

a) $4\sqrt{12}-3\sqrt{48}+5\sqrt{75}-2\sqrt{108}$;

b) $\sqrt{20}-3\sqrt{80}+5\sqrt{45}-2\sqrt{125}$;

c) $\sqrt{60}-4\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\sqrt{\dfrac{5}{3}}$;

d) $4\sqrt{2x}-7\sqrt{18x}-5\sqrt{8x}+\sqrt{32x}$ $(x\geq 0)$;

e) $\sqrt{50x^2y^5}-13y\sqrt{2x^2y^3}+xy\sqrt{98y^3}$ $(x\geq 0, y\geq 0)$.

10. Rút gọn :

a) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+2}$;

b) $\dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$;

d) $\dfrac{4}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$;

e) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}}-\sqrt{27}$;

f) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}$.

11. Rút gọn :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

b) $\sqrt{32-4\sqrt{60}}-\sqrt{\dfrac{2}{4+\sqrt{15}}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}$;

d) $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$.

12. Rút gọn :

a) $\left(\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$;

b) $\dfrac{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\dfrac{6}{2-\sqrt{10}}+\sqrt{67+12\sqrt{7}}$;

c) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{14}{2\sqrt{2}-1}-\dfrac{6}{2-\sqrt{2}}\right).\sqrt{17-12\sqrt{2}}$.

13. Giải phương trình :

a) $5\sqrt{2x}-7=5+2\sqrt{2x}$;

b) $\dfrac{7}{2}\sqrt{8x}-\sqrt{18x}-9=\sqrt{2x}$;

c) $\dfrac{2}{3}\sqrt{9x+27}-\dfrac{3}{2}\sqrt{4x+12}+8=\sqrt{3+x}$;

d) $\sqrt{4x-20}-3\sqrt{\dfrac{x-5}{9}}+\sqrt{x-5}=4$.

14. Rút gọn :

a) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}$ với $x>0, y>0$;

b) $\left(2+\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)\left(2-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$ với $a\geq 0, a\neq 1$;

c) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x>0, x\neq 1$;

d) $\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0, x\neq 1$.

15. Cho biểu thức : $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

a) Tìm giá trị của x để P có nghĩa rồi rút gọn P.

b) Tìm x để $\dfrac{1}{P}\leq -\dfrac{5}{2}$.

16. Chứng minh :

a) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}-\dfrac{\sqrt{216}}{3}\right).\dfrac{1}{\sqrt{6}}=-\dfrac{3}{2}$;

b) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a-b$ $(a, b>0, a\neq b)$.

LUYỆN TẬP

1. Tính :

a) $-\frac{1}{2}\sqrt{108}-\frac{1}{15}\sqrt{75}-\frac{1}{22}\sqrt{363}+\sqrt{12}$;

b) $2\sqrt{\frac{27}{2}}-\sqrt{\frac{48}{9}}-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{18}}$;

c) $2y\sqrt{45}+3\sqrt{20y^2}$;

d) $3x\sqrt{72x}-9\sqrt{50x^3}$ với $x \geq 0$.

2. Tính :

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

b) $(3\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{28-12\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{13-\sqrt{160}}-\sqrt{53+4\sqrt{60}}$;

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

3. Tính :

a) $\sqrt{2}(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{2})$;

b) $(4-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{14})\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

c) $\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

4. Tính :

a) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}+\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$;

b) $\left(\frac{3\sqrt{125}}{15}-\frac{10-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{21}}}$;

d) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+3\sqrt{21}}}(3\sqrt{2}+\sqrt{14})$.

5. Giải phương trình :

a) $3\sqrt{20x}-\sqrt{45x}=15$;

b) $3\sqrt{9x-9}-\sqrt{4x-4}=\sqrt{x-1}+24$.

6. Rút gọn :

a) $\left(\frac{y}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}\right):\frac{\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}}$ với $y > 0$;

b) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{2}{a-1}\right)$

với $a > 0, a \neq 1$;

c) $\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}$

với $x \geq 0, x \neq 1$;

d)

$\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}\right):\left(\frac{x+y+2xy}{1-xy}+1\right)$

với $x \geq 0, y \geq 0, xy \neq 1$.

7. Cho biểu thức

$$M=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{x+4}{x-4}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

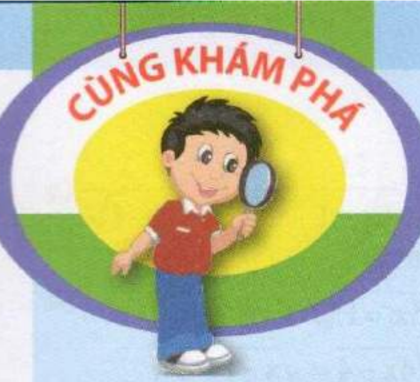
$(x > 0, x \neq 4)$.

a) Rút gọn M.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên.

8. Công thức Heron để tính diện tích tam giác là $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh và $p=\frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

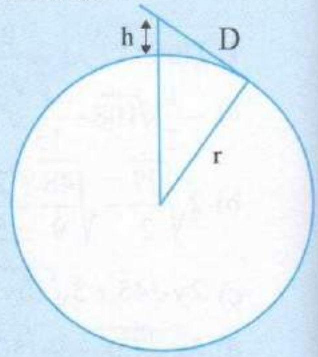
Tính diện tích tam giác ABC, biết ba cạnh của nó là $AB = a$, $AC = \frac{a}{2}$, $BC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.



KHOẢNG CÁCH XA NHẤT CÓ THỂ NHÌN THẤY TRÊN MẶT ĐẤT

Vì bề mặt Trái Đất có dáng cong nên khi đứng ở tầng cao nhất của một toà tháp có chiều cao là h (đo bằng mile), người ta chỉ có thể quan sát các vật trên bề mặt Trái Đất cách người quan sát một khoảng cách tối đa được tính theo công thức sau :

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$



trong đó :

D là khoảng cách cần tìm tính theo mile ;

$r = 3960$ miles, là bán kính Trái Đất.

Với chiều cao toà tháp là $h = 0{,}1$ miles, em hãy thử tính khoảng cách D (cho biết 1 mile $\approx 1{,}61$ km).

TÍNH CĂN BẬC HAI BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỦ CÔNG

Hiện tại, khi tính căn bậc hai, các em học sinh thường dùng máy tính cầm tay để tính. Khi máy tính chưa ra đời, người ta tính căn bậc hai của một số bằng phương pháp thủ công (tính tay).

Ví dụ 1 : Tính $\sqrt{4096}$.

Phương pháp đó được thực hiện như sau:

Bước 1: Chia số cần tìm căn bậc hai từ phải qua trái thành từng nhóm hai chữ số. Số 4096 được chia thành hai nhóm 40'96 (Số 529 được chia 5'29).

Bước 2 : Tìm số x lớn nhất mà khi ta bình phương số đó được kết quả nhỏ hơn hoặc bằng nhóm số bên trái, ta có $6^2 < 40 < 7^2$. Chọn $x = 6$.
Viết số 6 phía trên số 4096 để ghi nhớ.
Tính hiệu của nhóm số đầu tiên với $6^2 = 36$, ta được $40 - 36 = 4$.

ghi nhớ → 6

$$\begin{array}{r|l} 4096 & 6 \\ -\ 36 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Bước 3 : Điền nhóm số thứ hai vào bên phải số 4 được số mới là 496.

ghi nhớ → 6

$$\begin{array}{r|l} 4096 & 6 \\ -\ 36 & \\ \hline 496 & \end{array}$$

Bước 4 : Gấp đôi số vừa tìm được ($6 . 2 = 12$) và đặt vào khoảng trống bên phải số 496.

$$\begin{array}{r|l} 4096 & 6 \\ -\ 36 & \\ \hline 496 & 12... \end{array}$$

Bước 5 : Tìm số y lớn nhất điền vào bên phải số 12… được số mới để khi nhân số đó với y được số nhỏ hơn hoặc bằng 496.
Trường hợp này là số 4 vì $124.4 = 496$ và $496 - 496 = 0$.
Ghi nhận số mới là 4 và viết bên phải số 6.

ghi nhớ → 64

$$\begin{array}{r|l} 4096 & 6 \\ -\ 36 & \\ \hline 496 & 124 \\ -\ 496 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Vậy $\sqrt{4096} = 64$.

Ví dụ 2 : a) Tính $\sqrt{729}$

ghi nhớ → 27

$$\begin{array}{r|l} 729 & 2 \\ -\ 4 & \\ \hline 329 & 47 \\ -\ 329 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\sqrt{729} = 27$

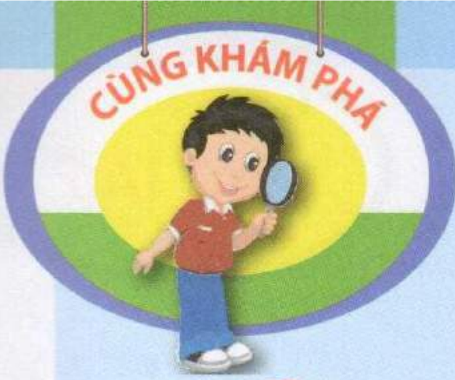
b) Tính $\sqrt{9801}$

ghi nhớ → 99

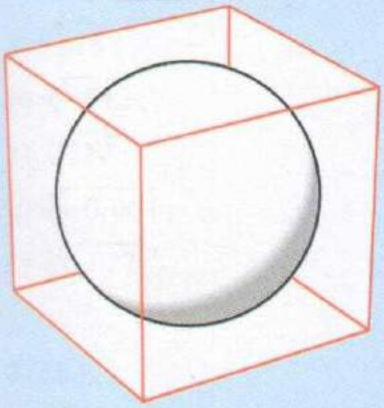
$$\begin{array}{r|l} 9801 & 9 \\ -\ 81 & \\ \hline 1701 & 189 \\ -\ 1701 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\sqrt{9801} = 99$

Hãy dùng máy tính cầm tay để kiểm tra lại các kết quả.



ĐO ĐƯỜNG KÍNH CỦA VẬT THỂ HÌNH CẦU



Hình bên minh hoạ cách dùng một khối hình lập phương để đo đường kính của các vật dụng hình cầu như quả bóng đá, bóng chuyền, ...

Đặt quả bóng vào trong một hộp hình lập phương sao cho quả bóng tiếp xúc với các mặt của hình lập phương đó.

Hãy tính đường kính S của quả bóng, biết thể tích hình khối lập phương $V = 8000 \text{ cm}^3$.

VẬN TỐC CỦA THUYỀN BUỒM OLYMPIAS

Thuyền Olympias là một loại thuyền buồm được người Hi Lạp sử dụng cách đây hơn 2000 năm. Năm 1987, một chiếc thuyền theo kiểu Olympias lần đầu đã được đóng lại và thực hiện chuyến hải trình với thuỷ thủ đoàn tình nguyện gồm 170 người. Khi đó họ đã tính tốc độ của thuyền theo công thức sau :

$$P = 0{,}0289s^3$$

tức là $s = \sqrt[3]{\dfrac{P}{0{,}0289}}$

trong đó : P tính bằng kilowatt ;

s là tốc độ (tính bằng "knot") ; 1 knot $\approx \dfrac{8}{7}$ miles/giờ.

(Nguồn dẫn : Algebra 2 – Tác giả : Ron Larson, Laurie Boswell,... – Nhà xuất bản : McDougal Littell, 2004.)

Cho biết sức chèo của thuỷ thủ đoàn là 10,5 kilowatt, em hãy thử tính tốc độ của thuyền lúc đó.

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

1. Tìm điều kiện có nghĩa của các căn thức sau :

a) $\sqrt{3x-2}$;

b) $\sqrt{\dfrac{2}{x-2}}$;

c) $\sqrt{-2x}+\sqrt{\dfrac{3}{x+2}}$.

2. Rút gọn :

a) $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$;

b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{42-10\sqrt{17}}+\sqrt{33-8\sqrt{17}}$;

d) $(2+\sqrt{5})\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

e) $(3\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{28-12\sqrt{5}}$;

f) $\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

3. Thực hiện phép tính :

a) $\sqrt{50}-3\sqrt{98}+2\sqrt{8}+\sqrt{32}-5\sqrt{18}$;

b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\sqrt{108}+5\sqrt{1\dfrac{1}{3}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{1+\sqrt{6}}$;

d) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}+\sqrt{\dfrac{2}{8+3\sqrt{7}}}$;

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}$;

f) $\dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

4. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{11x-8}=6$;

b) $\sqrt{2x+1}+1=x$;

c) $2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-9}=15$;

d) $3\sqrt{27x}-2\sqrt{12x}-5=10$;

e) $\sqrt{x^2-12x+36}+3=10$;

f) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5$.

5. Rút gọn các biểu thức :

a) $\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{a}\right)$;

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\right)$;

c) $\dfrac{\sqrt{x}+7x+13}{x+3\sqrt{x}-10}+\dfrac{\sqrt{x}+5}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+5}$.

d) $\left(\dfrac{(16-\sqrt{a})\sqrt{a}}{a-4}+\dfrac{3+2\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}-\dfrac{2-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}\right):\dfrac{1}{a+4\sqrt{a}+4}$.

6. Cho biểu thức

$$A=\left(1:\dfrac{\sqrt{1+x}}{3}+\sqrt{1-x}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right).$$

a) Rút gọn A.

b) Tính x khi $A=\dfrac{1}{2}$.

7. Cho biểu thức

$$P=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+3}{x-9}\right):\left(\dfrac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}-1\right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $P<\dfrac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT

- Hàm số bậc nhất
- Đồ thị của hàm số bậc nhất

Khối lượng P của một loại máy bay hạng nhẹ được tính phụ thuộc vào lượng xăng mang theo bởi công thức :

$P = 6x + 2512$

Trong đó P tính bằng pound (1 pound $\approx$ 453,6 gam) và x là số gallon xăng mang theo (1gallon $\approx$ 3,785 lít).

Ta có P là một hàm số bậc nhất của biến số x.

CHỦ ĐỀ 4

HÀM SỐ BẬC NHẤT

Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

Hàm số bậc nhất

Quan sát một loại cây non đã có chiều cao là 2,56 cm. Kết quả theo dõi sự phát triển chiều cao của cây trong 5 tuần sau đó được ghi trong bảng sau :

T (số tuần)	0	1	2	3	4	5
H (chiều cao của cây tính bằng cm)	2,56	3,2	3,84	4,48	5,12	5,76

Sự liên hệ giữa H và T được diễn tả bởi công thức :

$$H = 0,64T + 2,56$$

Ta gọi H là hàm số bậc nhất theo T.

1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

◆ Khái niệm hàm số

Hoạt động 1 Gọi x (tính bằng cm) là cạnh và y (tính bằng cm^2) là diện tích tương ứng của hình vuông. Hãy điền giá trị thích hợp vào các ô trống sau :

x	1	2	3	4
y	1	4		

Cho đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho cứ mỗi giá trị của x tương ứng duy nhất một giá trị của y thì y được gọi là *hàm số* của x, và x được gọi là *biến số*.

Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức.

Ví dụ : Một chiếc ô tô chạy với vận tốc 50 km/h. Gọi s (tính bằng km) là quãng đường ô tô đi được ứng với thời gian t (tính bằng giờ) thì s là hàm số của biến số t được cho bằng bảng sau :

t	1	2	3	4
s	50	100	150	200

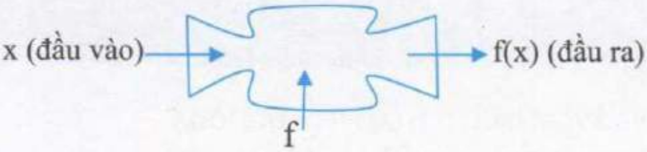
s được cho bằng công thức là : s = 50t.

THỬ TÀI BẠN

Em hãy nêu một ví dụ về hàm số được lấy từ thực tiễn.

Khi hàm số được cho bằng công thức y = f(x) thì biến số x chỉ lấy các giá trị mà tại đó f(x) xác định. Ví dụ : Hàm số y = f(x) = 3x xác định với mọi giá trị của x, còn hàm số $y = \frac{2}{x}$ chỉ xác định với $x \neq 0$.

Với y = f(x) = 3x thì f(2) = 3.2 = 6. Điều này có nghĩa là : Khi x = 2 thì y tương ứng có giá trị là y = 6.



Ví dụ : Cho hàm số $f(x) = \frac{4}{x}$ thì f(1) = 4, f(–2) = –2, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$.

Với hàm số y = f(x) mà y có giá trị không đổi thì y được gọi là *hàm hằng*.

THỬ TÀI BẠN

Cho hàm số f(x) = 2x – 1. Hãy tính f(0), f(2), f(–1).

◆ Đồ thị của hàm số

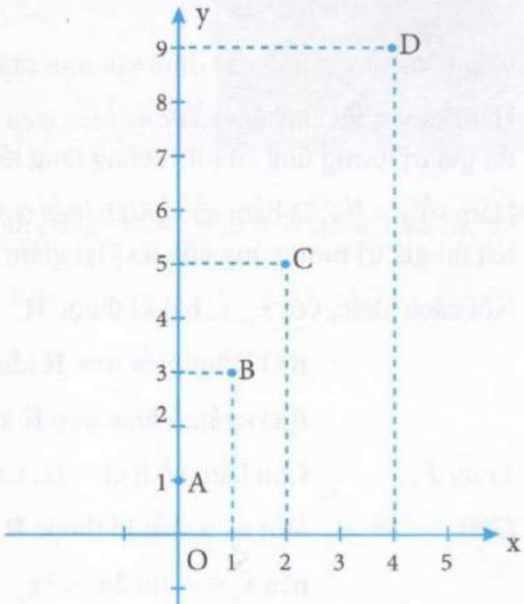
Hoạt động 2 Hãy vẽ đồ thị của hàm số y = 3x.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ *là tập hợp tất cả các điểm* $M(x\ ;\ f(x))$ *biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ* Oxy.

Ví dụ 1 : Hàm số được cho bằng bảng sau :

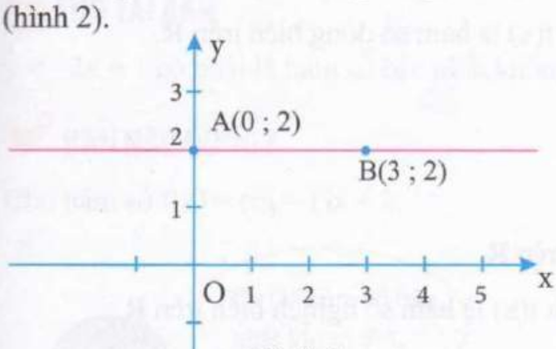
x	0	1	2	4
y	1	3	5	9

Hàm số có đồ thị là tập hợp gồm các điểm :
A(0 ; 1), B(1 ; 3), C(2 ; 5), D(4 ; 9) như hình 1.



Hình 1

Ví dụ 2 : Cho hàm số f(x) = 2 (hàm hằng) thì đồ thị gồm các điểm M(x ; 2) nên tạo thành đường thẳng đi qua A(0 ; 2) và song song với trục hoành (hình 2).



Hình 2

THỬ TÀI BẠN

Hãy vẽ đồ thị của hàm số y = 1.

◆ Hàm số đồng biến, nghịch biến

Hoạt động 3 Một vòi nước chảy vào một bể bơi cạn nước với vận tốc $2m^3$/giờ. Gọi V (tính bằng m^3) là thể tích nước trong hồ ứng với thời gian vòi chảy là t (giờ). Hãy điền giá trị thích hợp vào bảng sau :

t	1	2	3	4	5
V	2		6	8	

Khi giá trị của t tăng thì giá trị tương ứng của V tăng hay giảm ?

Hoạt động 4

Một ô tô với bình xăng chứa 30 lít. Cứ sau khi ô tô chạy được 20 km thì tiêu hao 1 lít xăng. Gọi V là số lít xăng còn lại trong bình ứng với quãng đường đã đi là s (km). Hãy điền giá trị thích hợp vào bảng sau :

s	60	100	180	240	280
V	27		21		16

Khi giá trị của s tăng thì giá trị tương ứng của V thế nào ?

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị x thuộc **R**.

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số *đồng biến trên* **R** (gọi tắt là *hàm số đồng biến*) khi giá trị của x tăng lên thì giá trị tương ứng của f(x) cũng tăng lên.

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số *nghịch biến trên* **R** (gọi tắt là *hàm số nghịch biến*) khi giá trị của x tăng lên thì giá trị tương ứng của f(x) lại giảm đi.

Nói cách khác, với x_1, x_2 bất kì thuộc **R** :

f(x) *đồng biến* trên **R** khi : nếu $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$

f(x) *nghịch biến* trên **R** khi : nếu $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Ví dụ 1 : Cho hàm số $f(x) = 3x$. Chứng minh f(x) là hàm số đồng biến trên **R**.

Giải : Với x_1, x_2 bất kì thuộc **R**, ta có :

nếu $x_1 < x_2$ thì $3x_1 < 3x_2$

do đó $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy $f(x) = 3x$ là hàm số đồng biến trên **R**.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $f(x) = -2x$. Chứng minh f(x) là hàm số nghịch biến trên **R**.

Giải : Với x_1, x_2 bất kì thuộc **R**, ta có :

nếu $x_1 < x_2$ thì $-2x_1 > -2x_2$

do đó $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy $f(x) = -2x$ là hàm số nghịch biến trên **R**.

THỬ TÀI BẠN

Hàm số $f(x) = 5x$ là đồng biến hay nghịch biến trên **R** ?

2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Khái niệm hàm số bậc nhất

Hoạt động 5

Một cái hồ đã có chứa 3 m^3 nước. Người ta mở một vòi nước chảy vào hồ với vận tốc 2 m^3/giờ. Em hãy điền vào chỗ trống (…) sau đây :

Sau 1 giờ thì thể tích nước trong hồ là V = ……….

Sau 2 giờ thì thể tích nước trong hồ là V = ………

Sau t giờ thì thể tích nước trong hồ là : V = … t + …

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ *với* a, b *là các số cho trước và* $a \neq 0$.

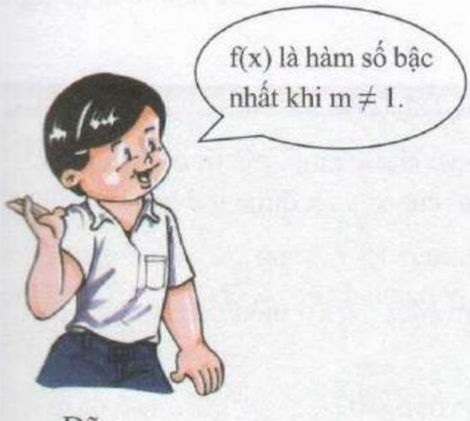
Ví dụ : $y = 3x - 2$ là hàm số bậc nhất với $a = 3$, $b = -2$.

THỬ TÀI BẠN

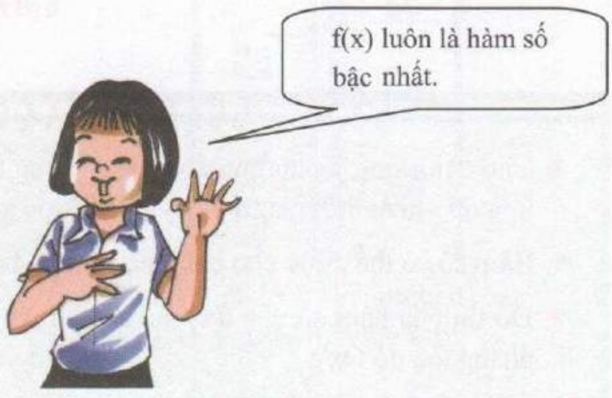
$y = -2x + 1$ có phải là hàm số bậc nhất không ?

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho hàm số $f(x) = (m - 1)x + 2$.



Dũng



Thu

Theo em, bạn nào đúng ?

Tính chất hàm số bậc nhất

Hoạt động 6

Minh muốn mua một cuốn sách giá 20 000 đồng và một số cuốn tập với giá 5000 đồng một cuốn. Nếu Minh mua một cuốn sách và c cuốn tập thì tổng số tiền phải trả là $S(c) = 20000 + 5000c$. Hãy tính S(2), S(3), S(4) rồi sắp thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Hoạt động 7

Một nhóm bạn góp được 20 triệu đồng để làm một album ca nhạc. Một phòng thu âm cho biết giá cho việc sản xuất một đĩa gốc là 10 triệu đồng và mỗi đĩa in sao là 60 000 đồng. Nếu nhóm muốn có c đĩa in sao thì số tiền còn lại là :

$S(c) = 20000000 - [10000000 + 60000c] = -60000c + 10000000$ (đồng).

Hãy tính S(50), S(80), S(100) rồi so sánh chúng.

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ *xác định với mọi* x *thuộc* **R** *và thoả mãn :*

– *Nếu* $a > 0$ *thì* y *là hàm số đồng biến trên* **R**.

– *Nếu* $a < 0$ *thì* y *là hàm số nghịch biến trên* **R**.

Ví dụ : Hàm số $y = 4x - 1$ là hàm số đồng biến trên **R**.

Hàm số $y = -3x + 2$ là hàm số nghịch biến trên **R**.

THỬ TÀI BẠN

Xét tính đồng biến và nghịch biến trên **R** của các hàm số sau :

$f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -2x - 5$.

GHI NHỚ

- Cho đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho cứ mỗi giá trị của x tương ứng duy nhất một giá trị của y thì y được gọi là *hàm số* của x, và x được gọi là *biến số*.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức.
- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x ; f(x))$ biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ Oxy.
- Hàm số bậc nhất đối với biến số x có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$.
- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của biến số x và thoả mãn :

  Nếu $a > 0$ thì y là hàm số đồng biến trên **R**.

  Nếu $a < 0$ thì y là hàm số nghịch biến trên **R**.

BÀI TẬP

Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x$. Tính $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$.

2. Cho hàm số $y = g(x) = \frac{-3}{4}x$. Tính $g(-4)$, $g(-1)$, $g(2)$, $g(8)$.

3. Sau đây là bảng theo dõi nhiệt độ cao nhất T (tính theo độ C) trong một số ngày tại Thành phố Hồ Chí Minh :

N (ngày)	Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5
T	28^o	30^o	32^o	30^o

T có phải là hàm số theo biến N không ?

4. Chứng minh hàm số $f(x) = -x$ là hàm số nghịch biến trên **R**.

5. Cho hai hàm số $y = x$ và $y = 3x$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm toạ độ giao điểm A, B của hai đồ thị trên lần lượt với đồ thị của hàm số $y = 3$.

Hàm số bậc nhất

6. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Nếu là hàm số bậc nhất thì nêu các hệ số a và b.

a) $y = 5x - 3$; b) $y = \frac{2}{x} + 4$;

c) $y = 2(x - 1) + 3$; d) $y = 3x^2 + 1$.

7. Hãy nêu tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau :

a) $y = 2x - 7$; b) $y = \left(1-\sqrt{2}\right)x + \sqrt{3}$;

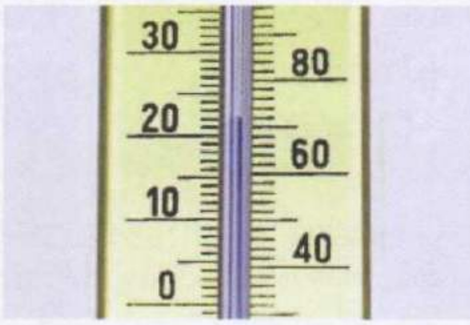
c) $y = -5x + 2$; d) $y = (1 + m^2)x - 6$.

8. Cho hàm số $y = (m - 2)x + 4$. Tìm các giá trị của m để y là đồng biến trên **R**.

9. Cho hàm số $y = (6 - 2m)x - 5$. Tìm các giá trị của m để y là nghịch biến trên **R**.

10. Cho hàm số $y = (3m + 3)x + 2m - 1$. Tìm giá trị của m để y là hàm số bậc nhất.

11. Đổi nhiệt độ.



Để đổi từ nhiệt độ F (Fahrenheit) sang độ C (Celsius), ta dùng công thức sau :

$$C = \frac{5}{9}\left(F - 32\right)$$

a) C có phải là hàm bậc nhất theo biến số F không ?

b) Hãy tính C khi $F = 30$.

c) Hãy tính C khi $F = 80$.

LUYỆN TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{-2}{3}x$.

Tính f(3), f(–6).

2. Chứng minh hàm số f(x) = – 4x là hàm số nghịch biến trên **R**.

3. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ?

a) $y = 2(x - 1)$;

b) $y = 1 - \dfrac{2}{x}$;

c) $y = 4 + 3(x + 1)$;

d) $y = x^2 + 3$.

4. Hãy xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau :

a) $y = \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2$;

b) $y = -\left(2 + m^2\right)x + 1$.

5. Cho hàm số y = (2m – 1)x + m. Tìm các giá trị của m để y là hàm số đồng biến trên **R**.

6. Cho hàm số y = (3m + 2)x + 4. Tìm các giá trị của m để y là nghịch biến trên **R**.

7. Cho hàm số y = (m + 2)(x – 1) + 2m. Tìm giá trị của m để y là hàm số bậc nhất.

8. Đổi nhiệt độ.

Để đổi từ nhiệt độ C (Celsius) sang độ F (Fahrenheit), ta dùng công thức sau :

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

a) F có phải là hàm bậc nhất theo biến số C không ?

b) Hãy tính F khi C = –10.

c) Hãy tính F khi C = 20.

9. Liều thuốc tính theo độ tuổi.

Để chuyển đổi liều thuốc dùng theo độ tuổi của một loại thuốc, các dược sĩ dùng công thức sau :

$$c = 0{,}0417D(a + 1)$$

Trong đó D là liều dùng cho người lớn (theo đơn vị mg) và a là tuổi của em bé, c là liều dùng cho em bé.

Với loại thuốc có liều dùng cho người lớn là D = 200 mg thì với em bé 2 tuổi sẽ có liều dùng thích hợp là bao nhiêu ?

10. a) Cho hàm số bậc nhất y = ax + 2. Tìm hệ số a, biết khi x = 2 thì y = 6.

b) Cho hàm số bậc nhất y = – 2x + b. Tìm hệ số b, biết khi y = 4 thì x = 1.

11. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{3})x - 1$.

a) Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên **R** ? Vì sao ?

b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{3}$.

c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{3}$.

Áp lực nước ở bề mặt của đại dương là 1 atmosphere (đơn vị đo áp suất). Khi ta lặn sâu xuống thì chịu áp lực của nước biển tăng lên. Cứ mỗi 10 mét độ sâu thì áp suất nước biển tăng thêm 1 atmosphere. Do đó ở độ sâu d (mét) thì áp suất tương ứng là :

$$p = \frac{1}{10}d + 1 \text{ với } 0 \leq d \leq 40.$$

Em hãy thử tính xem ở độ sâu 28 m thì áp suất của nước biển là bao nhiêu ?

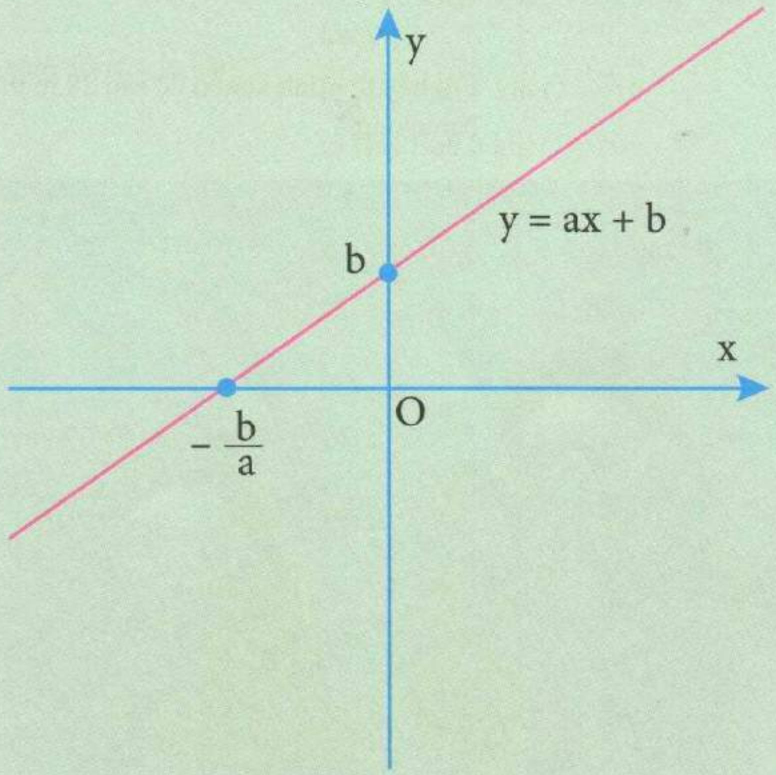
CHỦ ĐỀ 5

ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)



Đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ *là một đường thẳng cắt trục hoành tại điểm có hoành độ* $x = -\frac{b}{a}$ *và cắt trục tung tại điểm có tung độ là* $y = b$.

1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

◆ Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Hoạt động 1

Xét hai hàm số $y = x$ và $y = x + 2$.

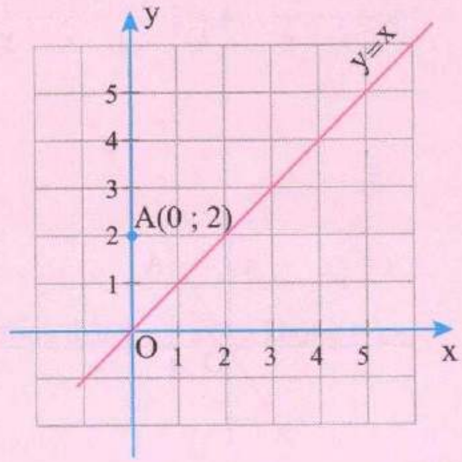
– Hãy điền các giá trị tương ứng vào ô trống ở bảng sau :

x	0	1	2
$y = x$	0		
$y = x + 2$	2		

– Vẽ đường thẳng cho bởi $y = x$.

– Vẽ các điểm $A(0 ; 2)$, $B(1 ; 3)$, $C(2 ; 4)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = x + 2$ được nêu trong bảng trên lên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

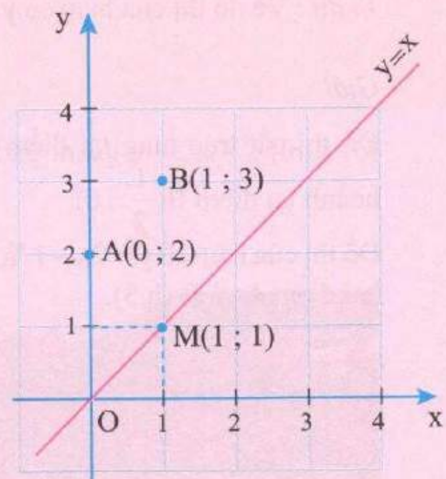
Các em có thấy ba điểm A, B, C thẳng hàng không ?



Hoạt động 2

Vẽ các điểm $O(0 ; 0)$, $M(1 ; 1)$ thuộc đường thẳng $y = x$. Vẽ các điểm $A(0 ; 2)$, $B(1 ; 3)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x + 2$ lên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

Tính OA. Tứ giác OMBA là hình gì ?



Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *là một đường thẳng* :

– *Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* b ;

– *Song song với đường thẳng* $y = ax$ *nếu* $b \neq 0$ *và trùng với đường thẳng* $y = ax$ *nếu* $b = 0$.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ còn được gọi là *đường thẳng* $y = ax + b$; b được gọi là *tung độ gốc* của đường thẳng.

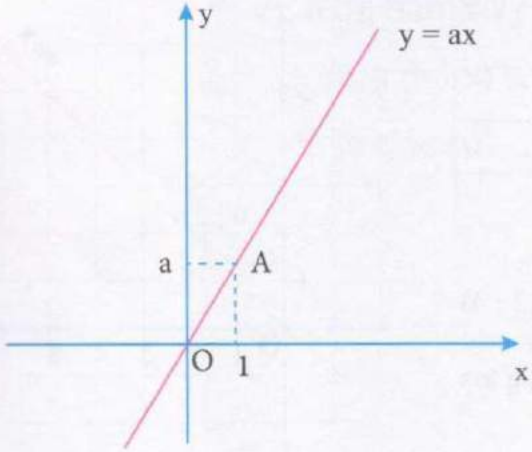
◆ Cách vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Khi $b = 0$ thì $y = ax$ có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $O(0 ; 0)$ và $A(1 ; a)$ (xem h.1).

Khi $b \neq 0$ thì $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng nên ta chỉ cần vẽ hai điểm thuộc đồ thị. Trong thực hành, ta thường dùng các giao điểm của đường thẳng với các trục toạ độ.

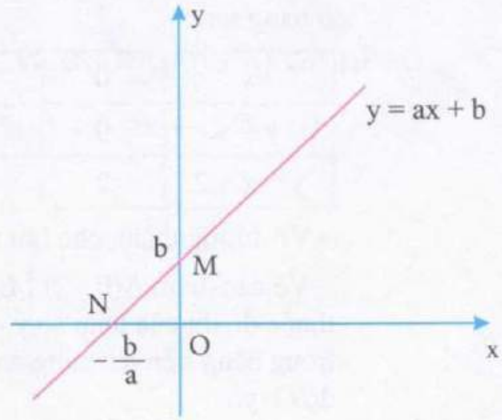
– Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $M(0\ ;\ b)$ thuộc trục tung Oy. Cho $y = 0$ thì $x = -\dfrac{b}{a}$, ta được điểm $N\left(-\dfrac{b}{a}\ ;\ 0\right)$ thuộc trục hoành Ox.

– Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm M và N thì ta có đồ thị của hàm số $y = ax + b$ (h.2).



Đồ thị của hàm số $y = ax$

Hình 1



Đồ thị của hàm số $y = ax + b$

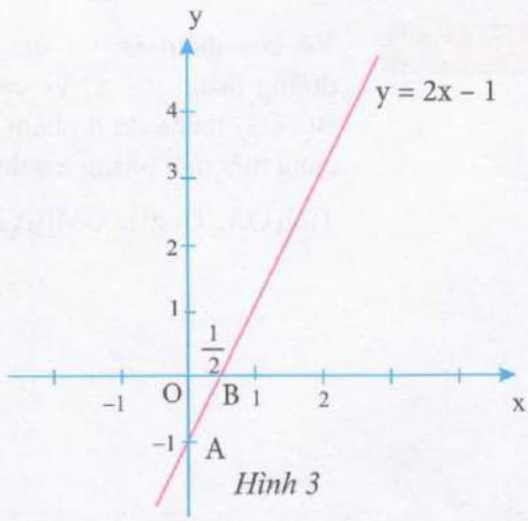
Hình 2

Ví dụ : Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$.

Giải :

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0\ ;\ -1)$, cắt trục hoành tại điểm $B(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0)$.

Đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B (h.3).



Hình 3

THỬ TÀI BẠN

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 2$.

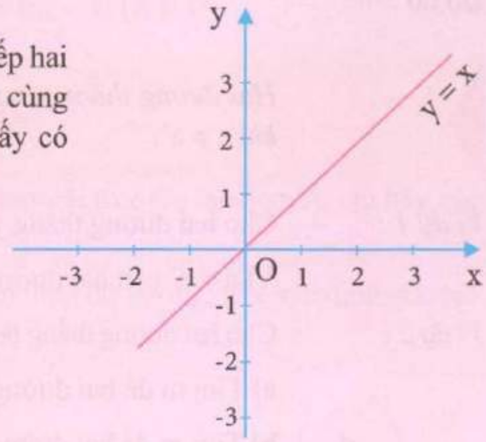
2. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

◆ Đường thẳng song song

Đường phân cách trong bể bơi cho hình ảnh các đường thẳng song song.

Hoạt động 3

Cho đường thẳng y = x như hình vẽ. Vẽ tiếp hai đường thẳng y = x + 2 và y = x – 1 trên cùng mặt phẳng toạ độ đó. Hai đường thẳng ấy có song song với nhau không ?



Xét hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$.

Nếu $a = a'$ và $b \neq b'$: Cả hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng $y = ax$ và không trùng nhau nên là hai đường thẳng song song.

Nếu $a = a'$ và $b = b'$: hai đường thẳng trùng nhau.

Vậy :

> *Cho hai đường thẳng* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *và* $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$.
>
> *Chúng song song với nhau khi và chỉ khi* $a = a'$ *và* $b \neq b'$.
>
> *Chúng trùng nhau khi và chỉ khi* $a = a'$ *và* $b = b'$.

Ví dụ : Cho đường thẳng $y = 3x + 1$ (ứng với $a = 3$, $b = 1$) và đường thẳng $y = 3x - 2$ (ứng với $a' = 3$, $b' = -2$).

Vì $a = a'$ và $b \neq b'$ nên hai đường thẳng trên song song với nhau.

◆ Đường thẳng cắt nhau

Hai thanh ray cắt nhau cho hình ảnh hai đường thẳng cắt nhau.

Hoạt động 4

Vẽ hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = 2x - 1$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Chúng có cắt nhau không ?

Xét hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$, ta đã biết :

Chúng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \neq b'$.

Chúng trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b = b'$.

Do đó :

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *và* $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ *cắt nhau khi và chỉ khi* $a \neq a'$.

Ví dụ 1 : Cho hai đường thẳng $y = 3x + 2$ (với $a = 3$) và $y = -x + 2$ (với $a' = -1$).

Vì $a \neq a'$ nên hai đường thẳng trên cắt nhau.

Ví dụ 2 : Cho hai đường thẳng là đồ thị của các hàm số bậc nhất sau : $y = mx + 1$ và $y = 3x - 2$.

a) Tìm m để hai đường thẳng song song.

b) Tìm m để hai đường thẳng cắt nhau.

Giải : Hàm số $y = mx + 1$ là hàm số bậc nhất khi $m \neq 0$ ứng với các hệ số $a = m$, $b = 1$.

Hàm số $y = 3x - 2$ có các hệ số $a' = 3$, $b' = -2$.

a) Để hai đường thẳng trên song song thì $a = a'$(vì đã có $b \neq b'$)

$\Leftrightarrow m = 3$ (thoả mãn điều kiện $m \neq 0$).

Vậy hai đường thẳng song song khi $m = 3$.

b) Để hai đường thẳng trên cắt nhau thì $a \neq a'$

$\Leftrightarrow m \neq 3$.

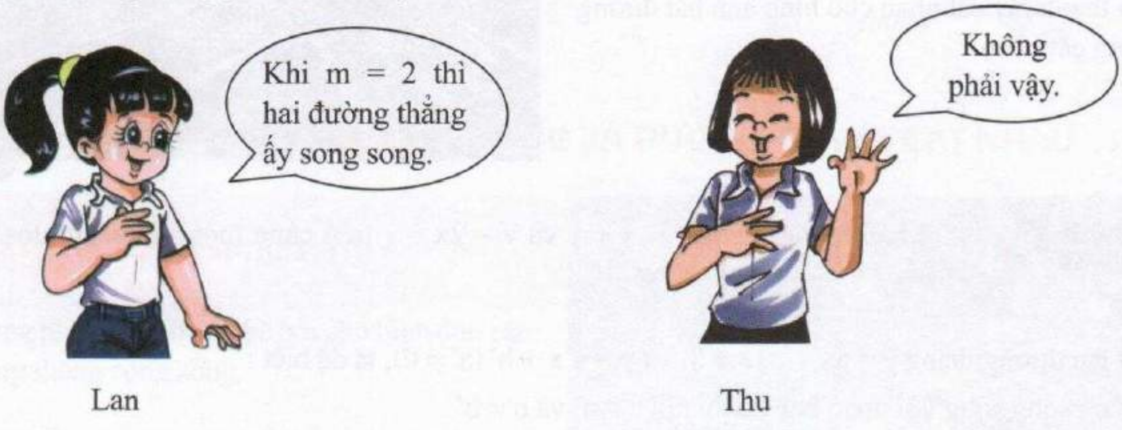
So với điều kiện đã nêu thì hai đường thẳng cắt nhau khi $m \neq 0$ và $m \neq 3$.

THỬ TÀI BẠN

Cho ba đường thẳng $y = 3x - 1$ và $y = -x + 2$ và $y = -x - 3$. Hãy nêu các cặp đường thẳng song song ; các cặp đường thẳng cắt nhau.

BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = mx + 1$.



Theo em, bạn nào đúng ?

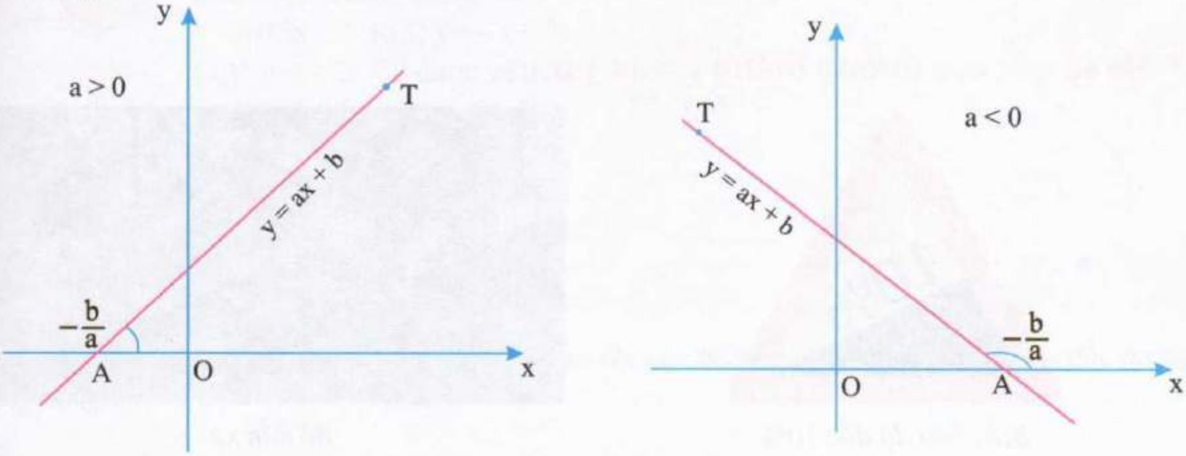
3. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox

Hoạt động 5 Cho đường thẳng $y = x + 2$. Đường thẳng này cắt trục Ox tại điểm A, em hãy xác định toạ độ của điểm A.

Chọn một điểm T thuộc đường thẳng và có tung độ dương, hãy xác định góc tạo bởi hai tia Ax và AT.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $y = ax + b$ cắt trục Ox tại điểm $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$ và đi qua điểm T có tung độ dương. Góc tạo bởi đường thẳng và trục Ox là góc tạo bởi hai tia Ax và AT (h.4).



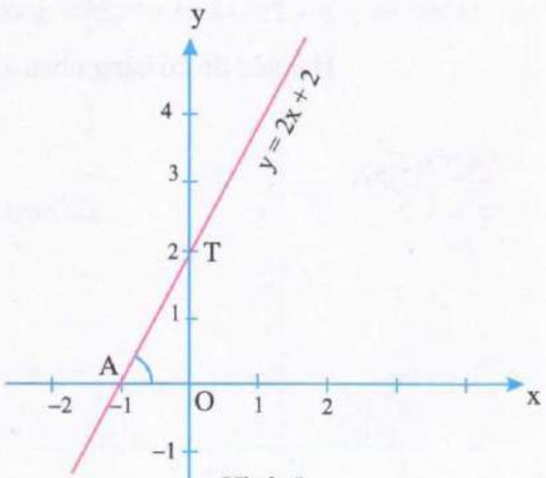
Hình 4

Ví dụ 1 : Xác định góc tạo bởi đường thẳng $y = 2x + 2$ và trục Ox.

Giải :

Đường thẳng $y = 2x + 2$ cắt trục Ox tại điểm $A(-1 ; 0)$ và đi qua điểm $T(0 ; 2)$.

Góc tạo bởi đường thẳng $y = 2x + 2$ và trục Ox là góc tạo bởi hai tia Ax và AT, đó chính là góc $\widehat{OAT}$ (h.5).



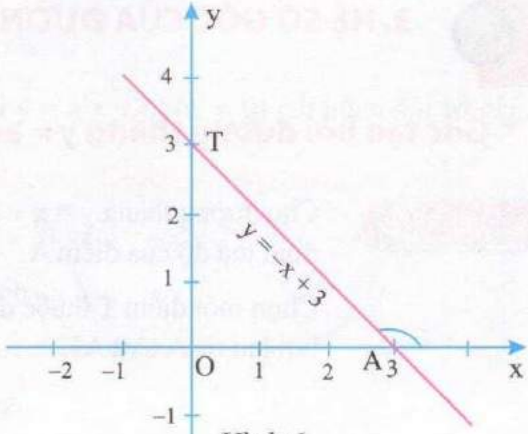
Hình 5

Ví dụ 2 : Xác định góc tạo bởi đường thẳng y = – x + 3 và trục Ox.

Giải :

Đường thẳng y = – x + 3 cắt trục Ox tại điểm A(3 ; 0) và đi qua điểm T(0 ; 3).

Góc tạo bởi đường thẳng y = – x + 3 và trục Ox là góc tạo bởi hai tia Ax và AT, đó chính là góc $\widehat{TAx}$ (h.6).



Hình 6

THỬ TÀI BẠN

Hãy xác định góc của các đường thẳng y = 3x + 3, y = –2x + 2 với trục Ox.

◆ Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

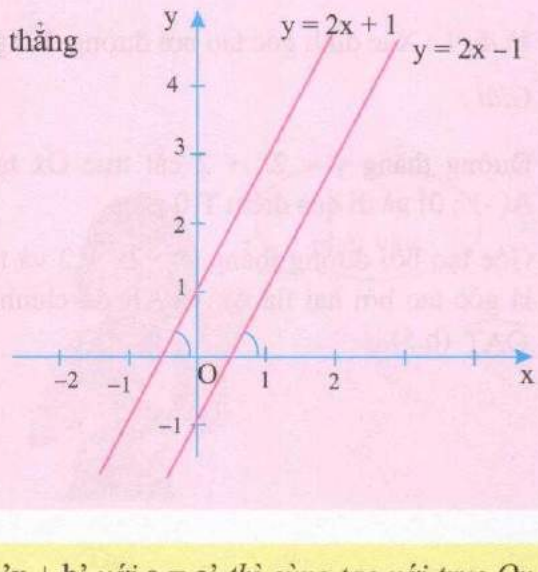
Biển báo độ dốc 10%


Bệ dẫn xe

Hoạt động 6

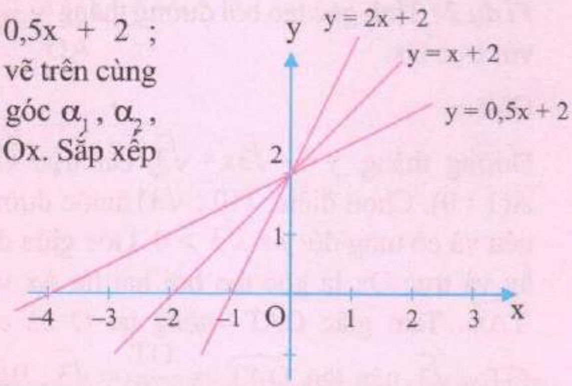
Hãy xác định góc tạo bởi hai đường thẳng y = 2x – 1 và y = 2x + 1 với trục Ox.

Hai góc đó có bằng nhau không ?



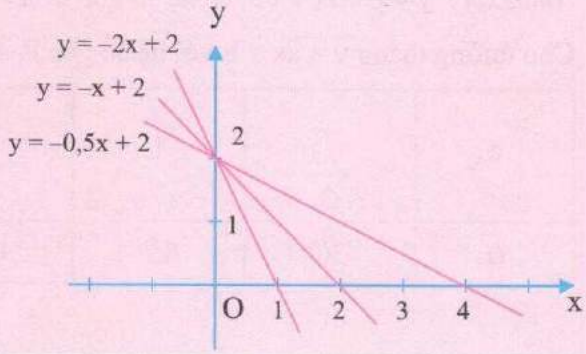
Hai đường thẳng y = ax + b *và* y = a'x + b' *với* a = a' *thì cùng tạo với trục Ox các góc bằng nhau.*

Hoạt động 7 Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 0,5x + 2$; $(d_2): y = x + 2$; $(d_3): y = 2x + 2$ được vẽ trên cùng mặt phẳng toạ độ. Hãy xác định các góc α_1, α_2, α_3 của (d_1), (d_2), (d_3) lần lượt với trục Ox. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần ba góc vừa nêu.



Đường thẳng $y = ax + b$ *(với* $a > 0$*) tạo với trục* Ox *góc nhọn. Giá trị của* a *càng lớn thì góc tương ứng càng lớn.*

Hoạt động 8 Cho ba đường thẳng $(d_1): y = -0,5x + 2$; $(d_2): y = -x + 2$; $(d_3): y = -2x + 2$ được vẽ trên cùng mặt phẳng toạ độ. Hãy xác định các góc α_1, α_2, α_3 của (d_1), (d_2), (d_3) lần lượt với trục Ox. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần ba góc vừa nêu.



Đường thẳng $y = ax + b$ *(với* $a < 0$*) tạo với trục Ox góc tù. Giá trị của* a *càng lớn thì góc tương ứng càng lớn.*

> *Đường thẳng* $y = ax + b$ *có* ***hệ số góc*** *là* a.

Đường thẳng $y = ax$ cũng có hệ số góc là a.

Ví dụ : Đường thẳng $y = 3x - 4$ có hệ số góc là 3. Đường thẳng $y = -2x + 1$ có hệ số góc là -2.

THỬ TÀI BẠN

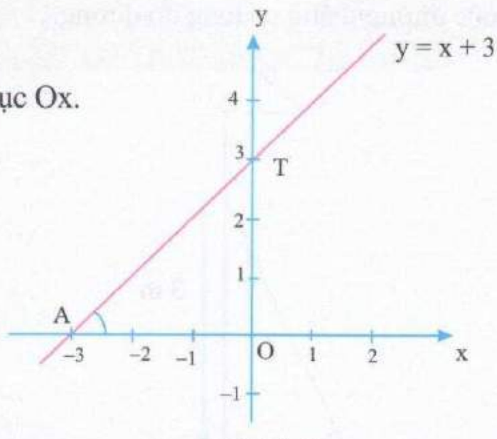
Đường thẳng $y = 4x - 2$ có hệ số góc là bao nhiêu ?

Ví dụ 1 : Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = x + 3$ với trục Ox.

Giải :

Đường thẳng $y = x + 3$ cắt trục Ox tại điểm $A(-3; 0)$. Chọn điểm $T(0; 3)$ thuộc đường thẳng đã nêu và có tung độ $y = 3 > 0$. Góc giữa đường thẳng ấy và trục Ox là góc $\widehat{OAT}$. Tam giác OAT vuông tại O và có $OA = OT = 3$ nên là tam giác vuông cân, do đó $\widehat{OAT} = 45^\circ$ (h.7).

Nhận xét : $y = x + 3$ có hệ số góc là $a = \tan \widehat{OAT} = 1$.

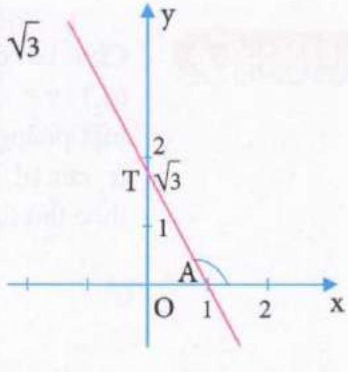


Hình 7

Ví dụ 2 : Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ với trục Ox.

Giải :

Đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ cắt trục Ox tại điểm A(1 ; 0). Chọn điểm $T(0 ; \sqrt{3})$ thuộc đường thẳng đã nêu và có tung độ $y = \sqrt{3} > 0$. Góc giữa đường thẳng ấy và trục Ox là góc tạo bởi hai tia Ax và AT, đó là $\widehat{TAx}$. Tam giác OAT vuông tại O và có OA = 1, $OT = \sqrt{3}$ nên $\tan \widehat{OAT} = \dfrac{OT}{OA} = \sqrt{3}$. Bằng cách tra bảng hoặc dùng máy tính ta có $\widehat{OAT} = 60^\circ$. Suy ra góc cần tìm là $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (h.8).



Hình 8

Nhận xét : $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ *có hệ số góc* là $a = -\sqrt{3} = -\tan \widehat{OAT}$.

Cho đường thẳng y = ax + b với hệ số góc là a và góc tạo bởi đường thẳng với trục Ox là α thì :

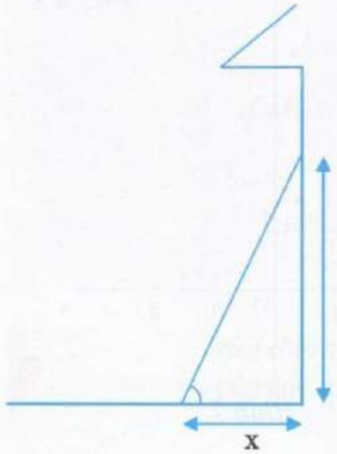
a	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	−1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
α	30°	45°	60°	120°	135°	150°

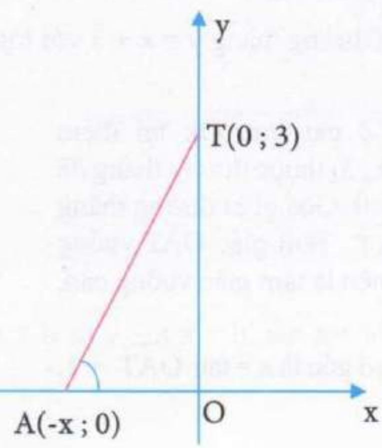
THƯ GIÃN (An toàn lao động)

Dựng một cái thang lên tường với độ cao là 3 mét, thì khoảng cách từ chân thang tới chân tường tối thiểu là bao nhiêu để bảo đảm an toàn ? Biết rằng để có sự an toàn thì hệ số góc của thang tối đa là 4.

Giải :

Gọi x là khoảng cách từ chân thang tới chân tường. Xét hệ toạ độ Oxy như trong hình vẽ, ta có A(–x ; 0) là giao điểm của đường thẳng (diễn tả thang) với trục Ox và T(0 ; 3) là điểm thuộc đường thẳng có tung độ dương.





Ta có đường thẳng nêu trên có hệ số góc $a = \tan \widehat{OAT} = \frac{OT}{OA} = \frac{3}{x}$.

Để đảm bảo an toàn thì $a \le 4$ nên $\frac{3}{x} \le 4 \Leftrightarrow 3 \le 4x \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le x$.

Do đó khoảng cách x tối thiểu phải là x = 0,75 m.

GHI NHỚ

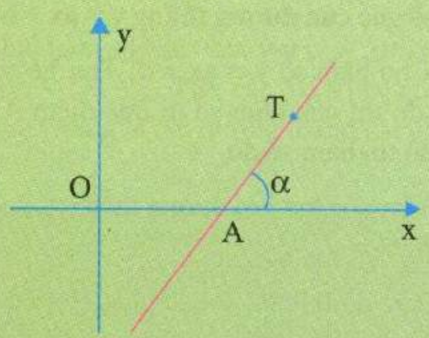
- Cho hai đường thẳng (d) và (d') lần lượt là đồ thị của các hàm số : $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ thì :

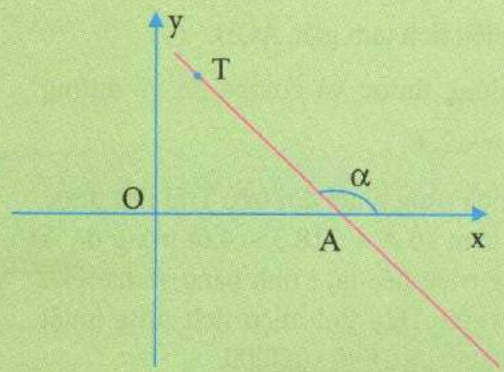
  (d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$

  (d) // (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$

  (d) trùng với (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.

- Góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox là góc tạo bởi hai tia Ax và AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng với trục Ox, còn T là điểm thuộc đường thẳng và có tung độ dương.





- Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a.

BÀI TẬP

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

1. Tìm b để đồ thị hàm số $y = 2x + b$ đi qua điểm $A(2 ; 6)$. Vẽ đồ thị của hàm số vừa tìm.

2. Tìm a để đồ thị hàm số $y = ax + 1$ đi qua điểm $A(1 ; 0)$. Vẽ đồ thị của hàm số vừa tìm.

3. a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = x$, $y = x - 3$, $y = -2x$, $y = -2x + 1$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tứ giác tạo bởi bốn đường thẳng trong câu a) là hình gì ?

4. a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = -x$ và $y = 2x + 3$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm giao điểm A của hai đường thẳng trong câu a. Tìm giao điểm B của đường thẳng $y = 2x + 3$ với trục tung.

c) Tính diện tích tam giác AOB.

5. Hãy dùng thước và compa để vẽ đường thẳng $y = \sqrt{2}\,x$.

6. Diện tích rừng nhiệt đới trên Trái Đất được cho bởi hàm số $A = 718{,}3 - 4{,}6t$ trong đó A tính bằng triệu héc-ta, t tính bằng số năm kể từ năm 1990. Hãy tính diện tích rừng nhiệt đới vào các năm 1990 và 2000.

Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

7. Hãy nêu các cặp đường thẳng song song và các cặp đường thẳng cắt nhau trong các đường thẳng sau :

$(d_1) : y = 2x - 1$; $(d_2) : y = 1{,}5x + 4$;

$(d_3) : y = -1{,}5x - 3$; $(d_4) : y = 2x + 5$.

8. Tìm a để đường thẳng $y = ax + 4$ song song với đường thẳng $y = -3x - 1$.

9. Cho hai hàm số bậc nhất $y = (2 - m)x + 5$ và $y = (m - 4)x - 7$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của chúng là hai đường thẳng cắt nhau.

10. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2mx + 1$ và $y = (m - 1)x + 3$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của chúng là hai đường thẳng song song.

11. Cho hai hàm số bậc nhất $y = x + 3$ và $y = mx - 1$. Tìm m để đồ thị của chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 1.

12. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 3x - 1$ và $y = 2mx + 1$. Tìm m để đồ thị của chúng cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 2.

Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

13. Cho hàm số $y = ax + 2$. Tìm hệ số góc a biết đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(2 ; 4)$. Vẽ đồ thị hàm số đó.

14. Tìm góc tạo bởi đường thẳng $y = \sqrt{3}x - 1$ và trục Ox.

15. Xác định hàm số bậc nhất biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(1 ; 0)$ và tạo với trục Ox góc là 45^o.

16. Xác định hàm số bậc nhất biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(1 ; 2)$ và tạo với trục Ox góc là 135^o.

LUYỆN TẬP

1. a) Tìm a để đồ thị hàm số $y = ax - 2$ đi qua điểm A(2 ; 2). Vẽ đồ thị của hàm số vừa tìm.

b) Tìm b biết đồ thị hàm số $y = 3x + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm.

2. a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = -x$, $y = -x + 2$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tứ giác tạo bởi bốn đường thẳng trong câu a) là hình gì ?

3. Tìm m để đường thẳng $y = (m + 1)x + 3$ song song với đường thẳng $y = 2x - 3$.

4. Cho hai hàm số bậc nhất $y = (1 + 2m)x - 3$ và $y = (m - 1)x - 7$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của chúng là hai đường thẳng cắt nhau.

5. Xác định hàm số bậc nhất, biết đồ thị đi qua điểm A(0 ; 2) và tạo với trục Ox một góc 30^o.

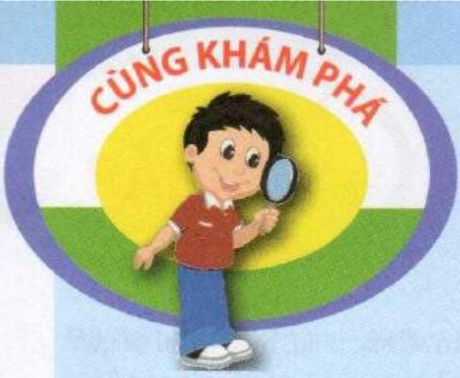
6. Tìm góc tạo bởi đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + 1$ và trục Ox.

7. Hãy dùng thước và compa để vẽ đường thẳng $y = \sqrt{3}\,x$.

8. Cho ba đường thẳng : $(d_1) : y = x$, $(d_2) : y = 2x + 1$, $(d_3) : y = mx + 2$.

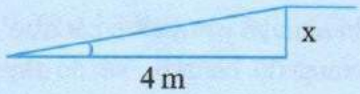
a) Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

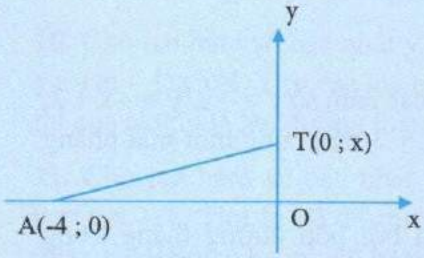
b) Tìm m để ba đường thẳng trên đồng quy.



CẦU THANG CHO NGƯỜI KHUYẾT TẬT

Hiện nay tại nước Mỹ quy định cầu thang cho người khuyết tật dùng xe lăn có hệ số góc không quá $\frac{1}{12}$. Để phù hợp với tiêu chuẩn ấy thì chiều cao của cầu thang tối đa là bao nhiêu khi biết đáy cầu thang có độ dài là 4 m ?





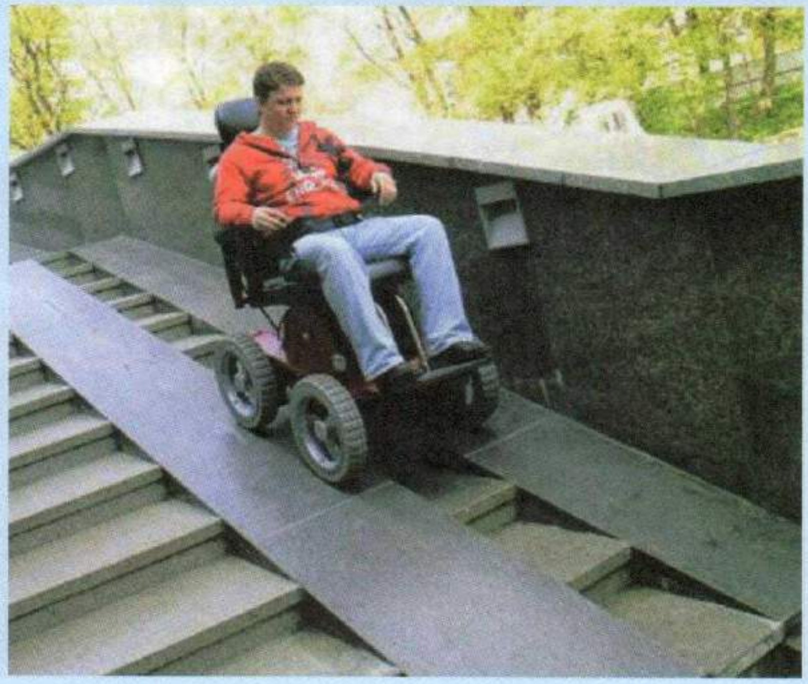
Gọi x là chiều cao của cầu thang. Xét hệ toạ độ Oxy như trong hình vẽ thì có O(0 ; 0), A(–4 ; 0) và T(0 ; x). Hệ số góc của cầu thang là

$$a = \tan\widehat{OAT} = \frac{OT}{OA} = \frac{x}{4}.$$

Theo quy chuẩn thì $a \leq \frac{1}{12}$ nên

$$\frac{x}{4} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}\ (\text{m}).$$

Vậy chiều cao tối đa của cầu thang là $\frac{1}{3}$ mét.



ÔN TẬP CHƯƠNG 2

1. Tìm các giá trị của m để hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 1$ là hàm số đồng biến.

2. Tìm các giá trị của m để hàm số bậc nhất $y = (m + 1)x - 4$ là hàm số nghịch biến.

3. Tìm a để các hàm số bậc nhất $y = (a + 1)x - 2$ và $y = (3 - a)x + 2$ có đồ thị là những đường thẳng song song.

4. Tìm a để các hàm số bậc nhất $y = (2a + 2)x + a + 4$ và $y = (2 - 2a)x + 4 - 3a$ có đồ thị là những đường thẳng trùng nhau.

5. a) Tìm a để các hàm bậc nhất $y = (2a + 1)x - 1$ và $y = (3 + a)x + 2$ có đồ thị là những đường thẳng cắt nhau.

b) Cho hai đường thẳng $y = mx - m + 2$ (d_1) và $y = (m - 3)x + m$ (d_2). Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm trên trục tung.

6. Cho hai hàm số $y = x + 3$, $y = -x + 3$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) và (d_2).

a) Tìm toạ độ giao điểm A của hai đường thẳng nói trên. Tìm các giao điểm B, C của (d_1) và (d_2) lần lượt với trục Ox.

b) Tìm góc tạo bởi (d_1) và (d_2) lần lượt với trục Ox.

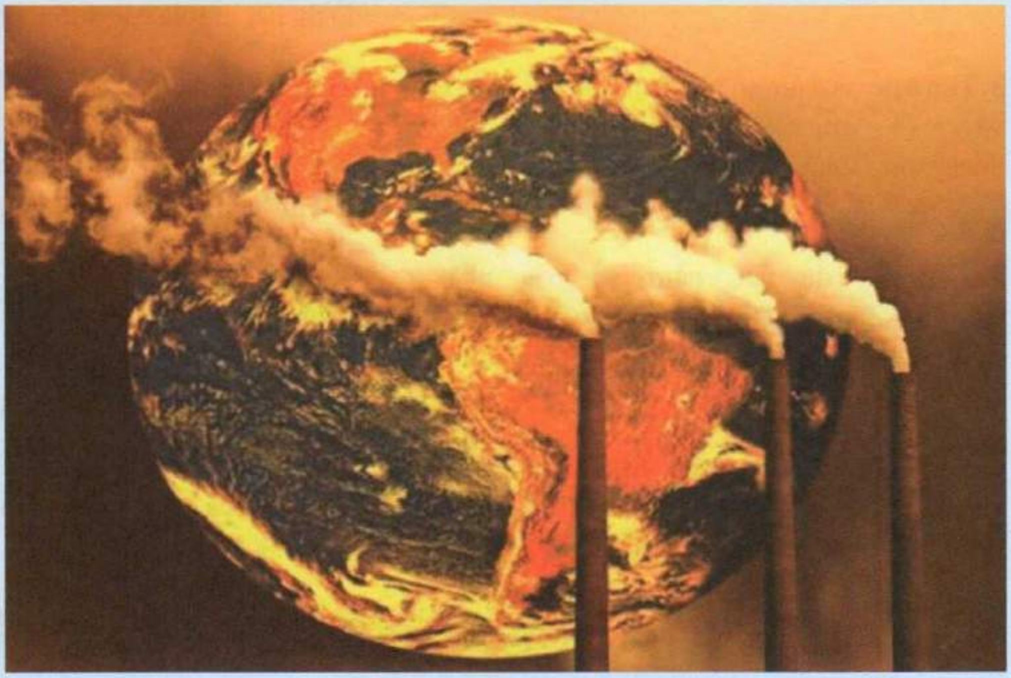
c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

7. Cho ba đường thẳng $(d_1) : y = 3x$, $(d_2) : y = x + 2$, $(d_3) : y = (m - 3)x + 2m + 1$.

Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

CÙNG KHÁM PHÁ

SỰ TĂNG LÊN CỦA NHIỆT ĐỘ BỀ MẶT TRÁI ĐẤT



Do các hoạt động công nghiệp thiếu kiểm soát của con người làm cho nhiệt độ Trái Đất tăng dần một cách rất đáng lo ngại. Các nhà khoa học đưa ra công thức dự báo nhiệt độ trung bình trên bề mặt Trái Đất như sau :

$$T = 0,02t + 15$$

Trong đó T là nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất tính theo độ C.

t là số năm kể từ năm 1950.

Dùng công thức nêu trên :

a) Em hãy nêu tốc độ tăng nhiệt độ trung bình mỗi năm trên bề mặt Trái Đất, kể từ năm 1950.

b) Em hãy tính xem nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất vào năm 2050 là bao nhiêu.