

NGUYỄN CAM - NGUYỄN VĂN HIỂN
TRẦN ĐỨC HUYỀN - DƯƠNG BỬU LỘC
HUYỀNH NGỌC THANH - NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN



**TÀI LIỆU
DẠY-HỌC**

TOÁN 7

**TẬP
HAI**



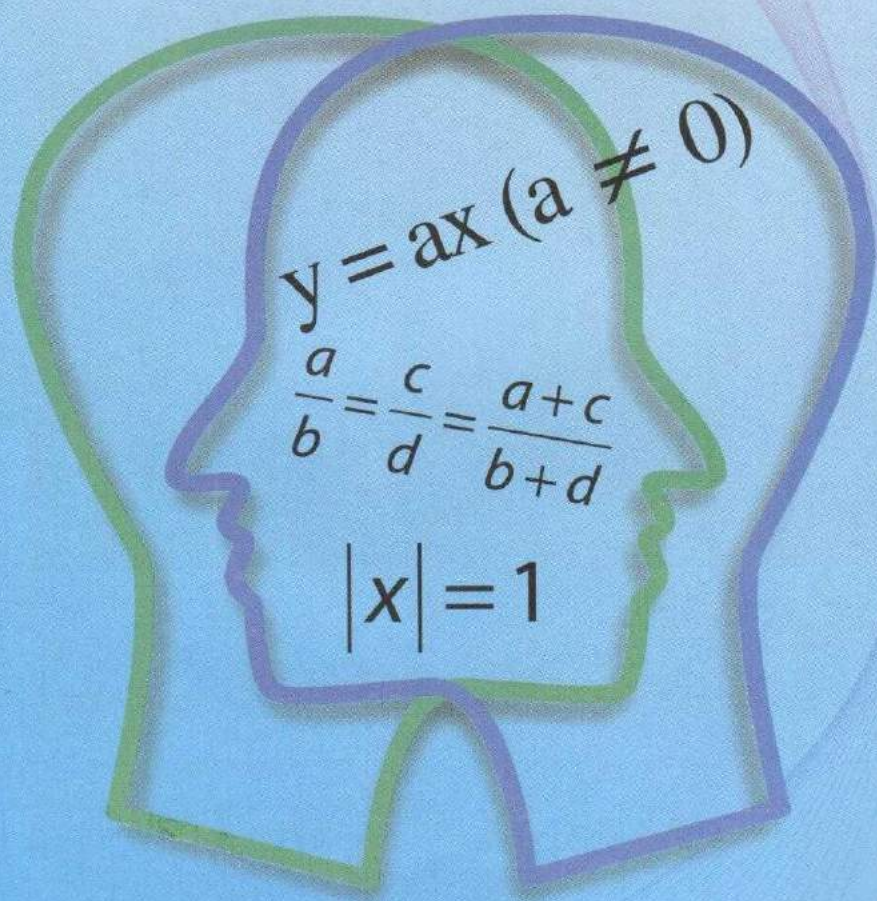
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Gợi ý sử dụng tài liệu	4
Mục lục	6
Phần ĐẠI SỐ	7
Chương 3- THỐNG KÊ	8
Chủ đề 7. Phương pháp thu thập số liệu thống kê – Tần số – Biểu đồ	9
Chủ đề 8. Trung bình cộng – Mốt	31
Ôn tập chương 3	42
Chương 4- BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	47
Chủ đề 9. Khái niệm về biểu thức đại số – Giá trị của biểu thức đại số	48
Chủ đề 10. Đơn thức	58
Chủ đề 11. Đa thức	65
Ôn tập chương 4	80
Phần HÌNH HỌC	81
Chương 3- QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC	82
Chủ đề 5. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác	83
Chủ đề 6. Các đường đồng quy của tam giác	100
Ôn tập chương 3	127
Ôn tập cuối năm	129

PHẦN

Đại số



CHƯƠNG

3

THỐNG KÊ

- Phương pháp thu thập số liệu thống kê – Tần số – Biểu đồ
- Trung bình cộng – Mốt



Trong đời sống hằng ngày, chúng ta luôn có nhu cầu cần nắm bắt tình hình các hoạt động, các hiện tượng xảy ra xung quanh. Căn cứ vào lượng thông tin thu nhận được, ta sẽ cố gắng dự đoán các khả năng có thể xảy ra giúp cho cuộc sống của chúng ta ngày càng thuận lợi hơn. Xuất phát từ những nhu cầu trên, bộ môn Khoa học Thống kê đã được hình thành.

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổng hợp, xử lý, trình bày và phân tích số liệu, được ứng dụng rộng rãi trong các hoạt động kinh tế và xã hội.

PHƯƠNG PHÁP THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ - TẦN SỐ - BIỂU ĐỒ

Thu thập số liệu thống kê, tần số

Bảng tần số các giá trị của dấu hiệu

Biểu đồ



(nguồn : www.lamdong.gov.vn)

Đà Lạt là thành phố nghỉ mát nổi tiếng của Việt Nam. Nhiệt độ trung bình hàng tháng (đo bằng độ C) trong một năm của thành phố Đà Lạt được ghi lại trong bảng sau :

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ trung bình	16	17	18	19	19	19	19	18	18	18	17	16

THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ, TẦN SỐ

Hoạt động 1

Bảng theo dõi chuyên cần trong một ngày của các lớp Khối 7, Trường Kết Đoàn được ghi lại trong bảng sau :

Lớp	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	7/9	7/10
Số học sinh vắng	2	1	0	0	1	3	0	0	1	2

Bảng 1

Em hãy quan sát bảng trên và trả lời các câu hỏi sau :

Câu hỏi	Trả lời
Có tổng cộng bao nhiêu lớp trong Khối 7 ?	
Mỗi con số ở dòng thứ hai cho biết điều gì ?	
Có bao nhiêu lớp không có học sinh vắng ?	
Có bao nhiêu lớp có 1 học sinh vắng ?	
Có bao nhiêu lớp có 2 học sinh vắng ?	
Có bao nhiêu lớp có 3 học sinh vắng ?	
Có bao nhiêu lớp có trên 3 học sinh vắng ?	

Hoạt động 2

Tuổi nghề (số năm làm việc theo nghề) của các công nhân trong một phân xưởng đóng tàu được ghi lại ở bảng sau :



20	3	14	10	9
18	4	5	8	10
17	6	20	3	2
15	18	5	16	8
18	10	4	8	1

Bảng 2

Em hãy quan sát bảng trên và trả lời các câu hỏi sau :

Câu hỏi	Trả lời
Xưởng đóng tàu có tổng cộng bao nhiêu công nhân ?	
Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong bảng ?	
Tuổi nghề cao nhất là bao nhiêu ?	
Tuổi nghề thấp nhất là bao nhiêu ?	
Có bao nhiêu công nhân đã đóng tàu được 10 năm ?	

Hoạt động

3

Điểm kiểm tra môn Toán của lớp 7C được thầy giáo ghi lại trong bảng sau :

Số thứ tự	Điểm	Số thứ tự	Điểm
1	10	21	9
2	6	22	9
3	9	23	6
4	7	24	6
5	5	25	8
6	4	26	6
7	6	27	8
8	8	28	6
9	7	29	5
10	10	30	7
11	5	31	6
12	8	32	5
13	9	33	6
14	5	34	7
15	7	35	6
16	6	36	9
17	6	37	9
18	5	38	8
19	9	39	8
20	5	40	6

Bảng 3

Em hãy đếm số bạn được điểm 10, điểm 9, điểm 8, ... và ghi kết quả vào ô trống sau :

Điểm	10	9	8	7	6	5	4
Số HS							

◆ Bảng số liệu thống kê ban đầu

Khi quan tâm về một vấn đề nào đó, người điều tra thường *thu thập số liệu* có liên quan và ghi lại các số liệu đó trong *bảng số liệu thống kê ban đầu*.

Bảng số liệu thống kê ban đầu có thể khác nhau tùy theo yêu cầu của mỗi cuộc điều tra.

Ví dụ : Bảng 1, 2, 3 trong các hoạt động trên là các *bảng số liệu thống kê ban đầu*.

◆ Dấu hiệu, đơn vị điều tra

Vấn đề mà người điều tra quan tâm được gọi là *dấu hiệu* và thường được kí hiệu bằng các chữ in hoa (A, B, X, Y, ...).

Ví dụ :

Dấu hiệu ở bảng 1 là số học sinh vắng, còn mỗi lớp là một *đơn vị điều tra*.

Dấu hiệu ở bảng 2 là số năm hành nghề, còn mỗi công nhân là một *đơn vị điều tra*.

Hoạt động 4

Quan sát lại các bảng trên và điền vào chỗ trống :

Bảng số liệu thống kê ban đầu	Dấu hiệu điều tra	Đơn vị điều tra	Số lượng đơn vị điều tra
1			
2			
3			



THỬ TÀI BẠN

Em hãy lập bảng số liệu thống kê ban đầu về tháng sinh của các bạn trong lớp. Hãy chỉ ra dấu hiệu điều tra, đơn vị điều tra và số lượng đơn vị điều tra.

◆ Giá trị của dấu hiệu, dãy giá trị của dấu hiệu

Tương ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là một *giá trị của dấu hiệu*. Các giá trị đó tạo thành dãy các giá trị của dấu hiệu và số phần tử của dãy luôn luôn bằng số các đơn vị điều tra (thường được kí hiệu là N).

Nếu người điều tra chỉ chú ý tới các giá trị của dấu hiệu thì bảng số liệu thống kê ban đầu có thể chỉ gồm các dãy số.

Ví dụ :

Trong bảng 1 ta có dãy các giá trị ghi lại số học sinh vắng của 10 lớp :

2	1	0	0	1	3	0	0	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Bảng 1

Trong bảng 2 ta có dãy các giá trị ghi lại tuổi nghề của 25 công nhân :

20	3	14	10	9
18	4	5	8	10
17	6	20	3	2
15	18	5	16	8
18	10	4	8	1

Bảng 2

♦ **Tần số của mỗi giá trị**

Hoạt động 5

Quan sát bảng 2 trong Hoạt động 2 và hãy cho biết có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy các giá trị của bảng 2. Giá trị 20 xuất hiện bao nhiêu lần ?

Trong dãy giá trị của dấu hiệu, một giá trị có thể xuất hiện một hoặc nhiều lần.

Ta gọi *số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu* là *tần số của giá trị đó*.

Giá trị của dấu hiệu thường được kí hiệu là x và tần số của giá trị x thường được kí hiệu là n .

Ví dụ :

Bảng 1 ở trên cho dãy các giá trị ghi lại số học sinh vắng của 10 lớp như sau :

2 1 0 0 1 3 0 0 1 2

Quan sát dãy giá trị trên, giá trị 0 xuất hiện 4 lần nên có tần số là 4 (có 4 lớp không có học sinh vắng).



THỬ TÀI BẠN

Tìm tần số các giá trị trong dãy số liệu trong ví dụ trên và ghi vào bảng sau :

Giá trị (x)	0	1	2	3
Tần số (n)				

Ví dụ :

Trong dãy các giá trị

20	3	9	20	5
5	3	5	14	20
3	3	20	2	14
5	5	5	14	3
9	2	14	9	5

Giá trị 20 xuất hiện 4 lần nên có tần số là 4 (có 4 công nhân tuổi nghề 20 năm).

Chú ý : Không được nhầm lẫn tần số n của một giá trị x với N là số các giá trị của dấu hiệu X .

N : Số các giá trị của dấu hiệu

n : Tần số của một giá trị

X : Dấu hiệu

x : Giá trị của dấu hiệu

✓ BẠN NÀO ĐÚNG ?

Mai nói tần số của một giá trị có thể bằng không, Hùng nói tần số luôn là một số nguyên dương. Theo em, bạn nào đúng ?

Hoạt động 6

Cho dãy giá trị của dấu hiệu :

9	2	5	4	6	8	7	7	8	6
10	6	10	9	6	5	7	8	4	9

Trong dãy số liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau ? Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

Chú ý :

Trong trường hợp dấu hiệu không có giá trị là số, ta có thể quy ra số để tiện lợi trong việc thống kê.

Ví dụ : Khi điều tra về sự yêu thích đọc sách của một nhóm học sinh thì ứng với một bạn nào đó trong nhóm, người điều tra phải ghi lại mức độ yêu thích của bạn ấy theo một trong các mức đã quy định, chẳng hạn : rất thích, thích, không thích và quy ra số như sau :

Dấu hiệu	Mức độ	Giá trị số
Ham thích đọc sách	Rất thích	2
	Thích	1
	Không thích	0



THỬ TÀI BẠN

Áp dụng cách quy ra số như trên, hãy điều tra sự ham thích chương trình truyền hình “GIỌNG HÁT VIỆT NHÍ” trong lớp của bạn. Tần số của giá trị 0 cho biết thông tin gì ?





BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

Hoạt động 7

Sau khi điều tra số nhân khẩu của mỗi hộ trong một chung cư, số liệu thu nhận được ghi lại trong bảng sau :

Hộ số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số nhân khẩu	3	4	4	5	3	4	6	5	4	2

Hộ số	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Số nhân khẩu	4	2	3	5	6	3	4	4	3	1

Tìm tần số của mỗi giá trị trong dãy số liệu ở trên và ghi vào bảng sau :

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	6
Tần số (n)						

◆ Lập bảng tần số

Để thu gọn bảng số liệu thống kê ban đầu người ta thường lập bảng tần số.

Bảng tần số là một khung hình chữ nhật gồm hai dòng : dòng trên ghi lại các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần ; dòng dưới ghi lại các tần số tương ứng của mỗi giá trị đó.

Bảng như trên gọi là Bảng tần số hay Bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu.

Ví dụ :

Từ bảng số liệu thống kê ban đầu số nhân khẩu của mỗi hộ trong một chung cư

3	4	4	5	3	4	6	5	4	2
4	2	3	5	6	3	4	4	3	1

ta có bảng tần số sau :

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	1	2	5	7	3	2	N = 20

Chú ý :

Bảng tần số có thể trình bày theo dạng “ngang” hay “dọc”.

Ví dụ :

Bảng tần số trên có thể được trình bày theo dạng dọc như sau :

Giá trị (x)	Tần số (n)
1	1
2	2
3	5
4	7
5	3
6	2
	N = 20

Hoạt động 8

Một cửa hàng bán giày có số giày (đôi) bán ra trong từng tháng được ghi trong bảng sau :

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số giày (đôi)	100	40	60	50	100	80	90	100	80	50	100	90

Hãy lập bảng tần số của số giày (đôi) bán được trong mỗi tháng.

So với bảng số liệu ban đầu thì bảng tần số giúp ta quan sát và tính toán giá trị của dấu hiệu một cách thuận tiện hơn. Ví dụ, từ bảng tần số trong ví dụ trên, ta có thể thấy ngay :

- Dấu hiệu X có 20 giá trị, nhưng trong đó chỉ có 6 giá trị khác nhau là 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Chỉ có một hộ có 1 nhân khẩu, song lại có đến bảy hộ có 4 nhân khẩu.
- Mỗi hộ trong chung cư chủ yếu có 4 hoặc 3 nhân khẩu.



THỬ TÀI BẠN

Hãy lập bảng tần số từ bảng số liệu thống kê ban đầu số mũ bảo hiểm bán trong 12 tháng ở một cửa hàng sau :

100	40	60	50	120	80	90	100	80	50	100	90
-----	----	----	----	-----	----	----	-----	----	----	-----	----



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Hùng nói : Trong bảng tần số, tổng các tần số của các giá trị luôn bằng số đơn vị điều tra.

Lan nói : Tổng các tần số của các giá trị luôn bằng số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

Theo em, bạn nào đúng ?

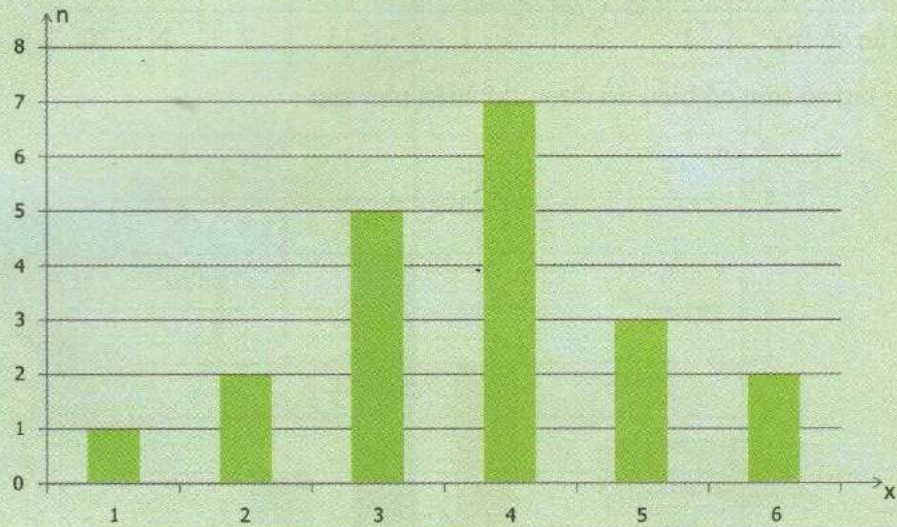
BIỂU ĐỒ

Hoạt động 9

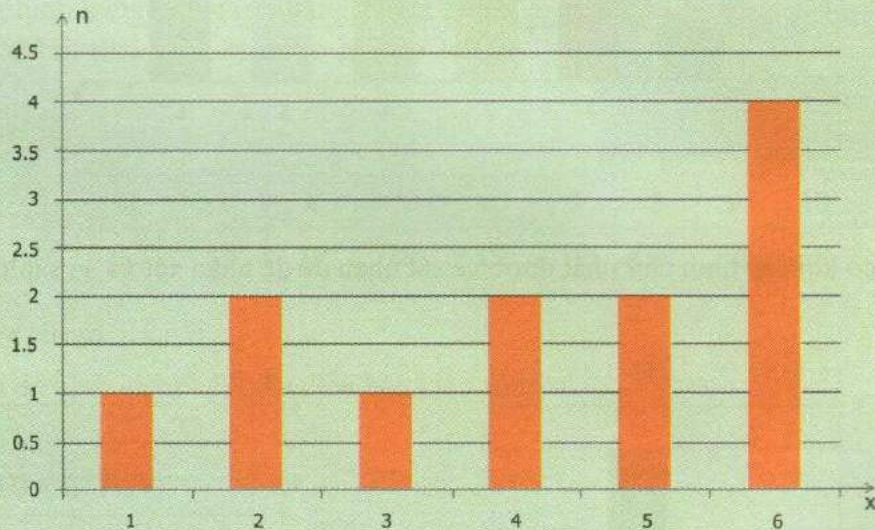
Cho bảng tần số

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	1	2	5	7	3	2	N = 20

So sánh chiều cao của các hình chữ nhật trong hình sau với tần số của các giá trị tương ứng trong bảng và ghi các tần số đó trên mỗi hình chữ nhật.



Hoạt động 10



Đọc chiều cao của các hình chữ nhật trong hình và ghi vào ô tần số tương ứng trong bảng sau :

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	6
Tần số (n)						

Để có hình ảnh minh họa một cách trực quan cho bảng tần số, người ta sử dụng biểu đồ.

◆ Biểu đồ hình chữ nhật

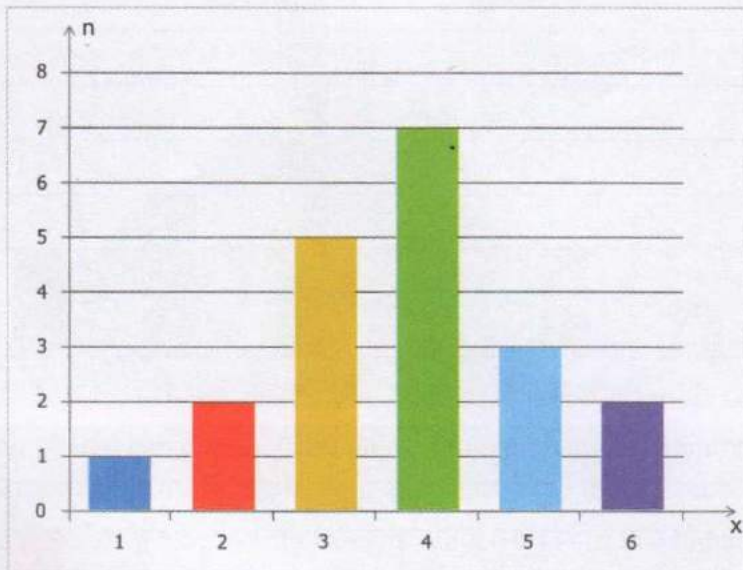
Để vẽ biểu đồ hình chữ nhật của một bảng tần số, ta thực hiện các bước :

- Vẽ trục tọa độ, trong đó trục hoành biểu diễn các giá trị x , trục tung biểu diễn tần số n (độ dài đơn vị trên hai trục có thể khác nhau).
- Tại mỗi vị trí có ghi một giá trị, ta vẽ hình chữ nhật có chiều cao bằng tần số của giá trị đó (chiều rộng các hình chữ nhật là như nhau).

Ví dụ :

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	1	2	5	7	3	2	$N = 20$

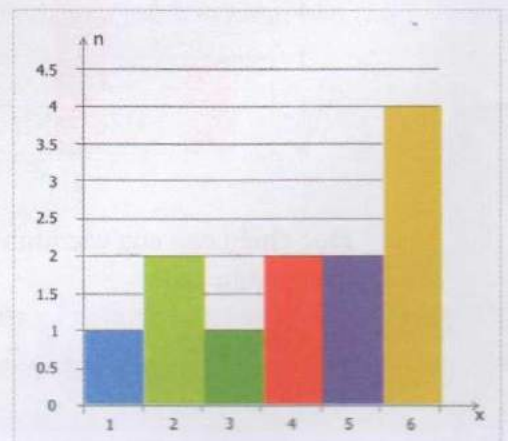
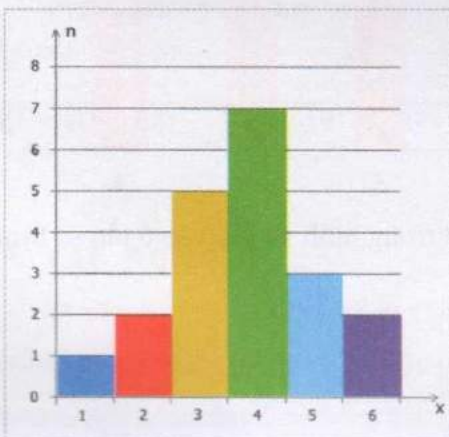
Bảng tần số trên có biểu đồ được thể hiện như sau :



Chú ý :

Cũng có khi các hình chữ nhật được vẽ sát nhau để dễ nhận xét và so sánh.

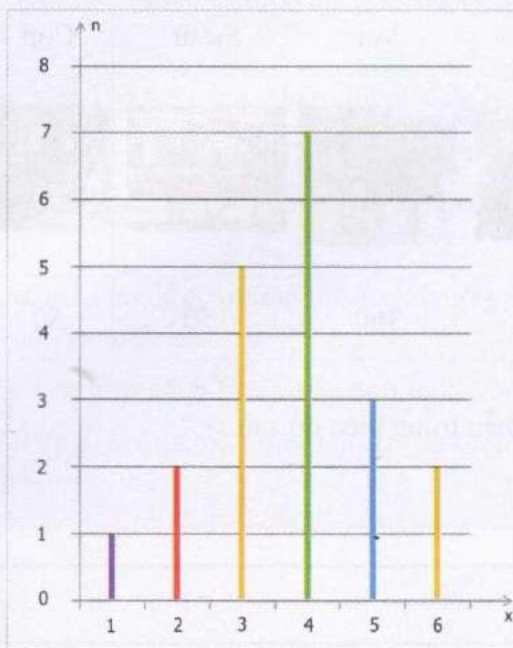
Ví dụ :



◆ Biểu đồ đoạn thẳng

Để việc vẽ hình đơn giản và nhanh chóng ta có thể thay các hình chữ nhật bằng các đoạn thẳng (chỉ cần vẽ bằng một nét chì màu), khi đó ta có biểu đồ đoạn thẳng.

Ví dụ :



THỬ TÀI BẠN

Đà Lạt là thành phố nghỉ mát nổi tiếng của Việt Nam. Nhiệt độ trung bình hàng tháng (đo bằng độ C) trong một năm của thành phố Đà Lạt được ghi lại trong bảng sau :



Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ	16	17	18	19	19	19	19	18	18	18	17	16

- Hãy lập bảng tần số.
- Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn bảng tần số trên.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Sau khi quan sát biểu đồ hình chữ nhật của một bảng tần số, hai bạn Nam và Việt có nhận xét như sau :

Nam nói : Số hình chữ nhật bằng số đơn vị điều tra.

Việt nói : Số hình chữ nhật bằng số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

Theo em, bạn nào đúng ?

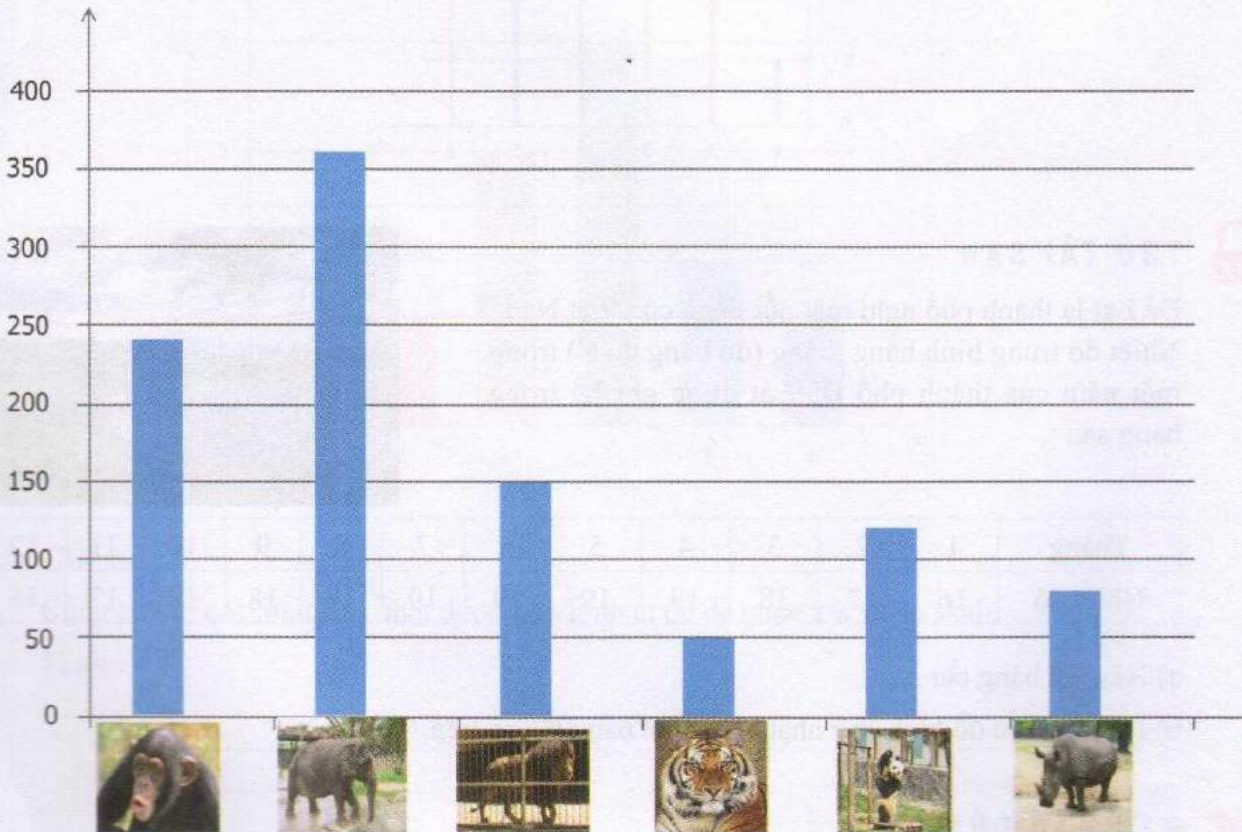


THỬ TÀI BẠN

Thông tin điều tra về con vật được yêu thích nhất trong Thảo cầm viên được ghi lại trong bảng tần số sau :

Con vật được yêu thích nhất	Khi	Voi	Sư tử	Cọp	Gấu	Tê giác
						
Số người chọn	240	360	150	50	120	80

Thông tin trên được biểu diễn trong biểu đồ sau :



Em hãy cho biết con vật nào được yêu thích nhất trong Thảo cầm viên.

Theo em, muốn có kết luận nhanh chóng ta nên quan sát bảng số liệu hay biểu đồ ?

GHI NHỚ

1. Số liệu thống kê là các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu nào đó mà chúng ta quan tâm.
2. Số các giá trị của dấu hiệu (có thể trùng nhau) luôn bằng số các đơn vị điều tra.
3. Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện của giá trị đó trong dãy giá trị của dấu hiệu.
4. Từ bảng số liệu thống kê ban đầu có thể lập bảng tần số (bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu).
5. Bảng tần số giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và tiện lợi cho việc tính toán.
6. Để có hình ảnh minh họa một cách trực quan cho bảng tần số, người ta dùng biểu đồ.
7. Chiều cao của đoạn thẳng (hoặc hình chữ nhật) trong biểu đồ tỉ lệ thuận với tần số của giá trị mà nó biểu diễn.

THƯ GIÃN

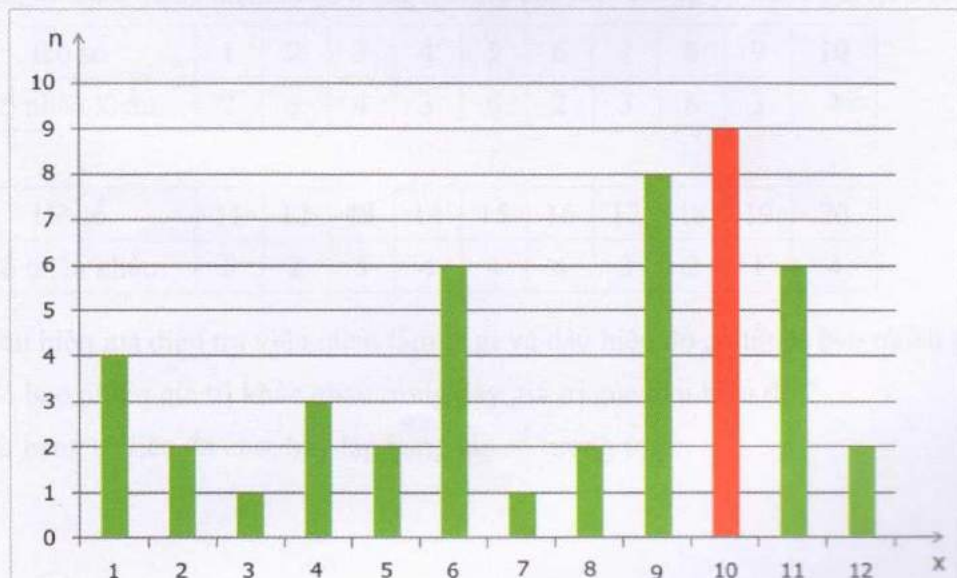
SINH NHẬT CỦA LỚP

Thống kê tháng sinh của các bạn trong lớp 7A được ghi lại trong bảng tần số :

Tháng (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tần số (n)	4	2	1	3	2	6	1	2	8	9	5	2



Biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn bảng tần số trên được các bạn vẽ như sau :



Các bạn quyết định chọn tháng có tần số cao nhất làm SINH NHẬT CỦA LỚP. Kết quả là :

THÁNG SINH NHẬT CỦA LỚP 7A
LÀ THÁNG **10**



LỚP 7A

Các em hãy thống kê tháng sinh của các bạn cùng lớp để tìm tháng sinh nhật cho lớp mình nhé ! Chúc các em vui và thành công.

BÀI TẬP

- Hãy lập bảng số liệu thống kê ban đầu của điểm bài kiểm tra môn Toán gần nhất của lớp em.
- Một cửa hàng bán giày ghi lại số đôi giày bán mỗi tháng trong bảng sau :

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số giày bán (đôi)	120	40	60	50	120	80	100	120	80	50	120	90

- Dấu hiệu mà cửa hàng quan tâm là gì và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị ?
 - Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó ?
 - Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của chúng.
- Hằng ngày Hùng đi bộ đến trường. Bạn ấy thử ghi lại thời gian cần thiết để đi từ nhà đến trường trong 12 ngày. Kết quả thu được ở bảng sau :

Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Thời gian đi (phút)	15	18	15	18	16	20	20	17	20	21	19	20

- Dấu hiệu mà bạn Hùng quan tâm là gì và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị ?
 - Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó ?
 - Tìm tần số của mỗi giá trị.
- Thông tin điều tra số nhân khẩu trong mỗi hộ của một chung cư được ghi lại trong bảng sau :

Hộ số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số nhân khẩu	2	3	4	3	6	2	3	6	3	4

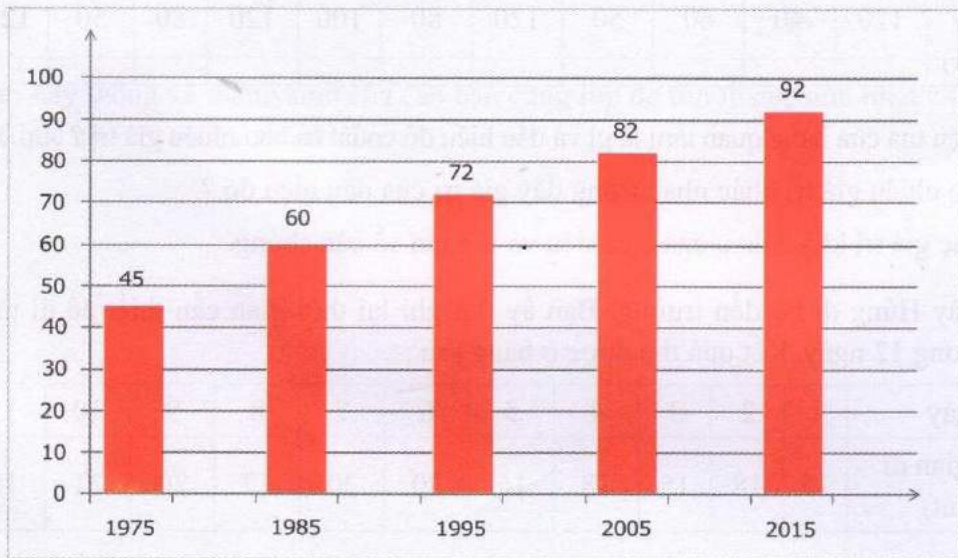
Hộ số	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Số nhân khẩu	5	2	5	4	4	4	3	2	1	4

- Dấu hiệu mà điều tra viên quan tâm là gì và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị ?
- Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó ?
- Từ bảng số liệu đã cho, hãy lập bảng tần số tương ứng.

5. Điểm kiểm tra môn Tiếng Anh của lớp 7C được cho trong bảng tần số sau :

Giá trị (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	1	9	8	9	5	4	2	N = 40

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật.
6. Dân số Việt Nam từ năm 1975 đến năm 2015 (đơn vị là triệu người) được biểu diễn bởi biểu đồ sau :



Hãy quan sát biểu đồ và trả lời các câu hỏi :

- a) Năm 1975, số dân của nước ta là bao nhiêu ?
 b) Sau bao nhiêu năm (kể từ năm 1975) thì dân số nước ta tăng thêm 47 triệu người ?
 c) Từ năm 2005 đến năm 2015, dân số nước ta tăng thêm bao nhiêu ?

LUYỆN TẬP

7. Hương ứng phong trào “Tết trồng cây”, số cây trồng của Khối 7 được ghi lại trong bảng sau :

Lớp	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	7/9	7/10
Số cây	12	10	15	12	18	15	20	20	15	15

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Lập bảng tần số và nhận xét về số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu.
8. Khi tìm hiểu về số sách truyện quyên góp của mỗi lớp trong dịp phát động phong trào “Xây dựng thư viện cho trẻ em mồ côi”, bạn Hùng lập được bảng sau :

Số thứ tự	Lớp	Số sách quyên góp được (cuốn)	Số thứ tự	Lớp	Số sách quyên góp được (cuốn)
1	6/1	30	11	8/1	40
2	6/2	35	12	8/2	45
3	6/3	45	13	8/3	50
4	6/4	45	14	8/4	30
5	6/5	30	15	8/5	45
6	7/1	15	16	9/2	45
7	7/2	35	17	9/2	55
8	7/3	15	18	9/3	60
9	7/4	25	19	9/4	55
10	7/5	40	20	9/5	45

- a) Dấu hiệu mà bạn Hùng quan tâm là gì và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị ?
 b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó ?
 c) Lập bảng tần số tương ứng.
 d) Có bao nhiêu lớp ủng hộ số sách từ 50 cuốn trở lên ?
 e) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn bảng tần số vừa lập.
9. Thời gian bơi ếch 50 m (tính theo giây) của 30 học sinh nữ được ghi trong bảng sau :

60	64	65	70	62	64	66	68	64	63
69	68	65	69	70	66	68	64	65	70
62	65	61	70	63	67	65	65	69	65



a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng tần số và rút ra một số nhận xét.

10. Trong một buổi tập chạy chuẩn bị cho Hội khoẻ Phù Đổng, thành tích chạy 100m của đội điền kinh nam Khối 7 được huấn luyện viên ghi lại trong bảng sau :



Học sinh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thời gian (giây)	15,2	15,4	14,5	15,2	15,8	15,6	15,4	15,3	15,7	15,9

Học sinh	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Thời gian (giây)	15,1	15,4	14,5	15,2	15,5	15,6	15,9	15,8	15,5	15,6

Hãy cho biết :

a) Dấu hiệu cần điều tra của huấn luyện viên điền kinh.

b) Số các giá trị của dấu hiệu và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

11. Bạn Mai tham gia thi bắn cung. Số điểm đạt được sau mỗi lần bắn được ghi lại ở bảng sau :

9	7	8	10	8	9	7	10	6	9
9	8	8	10	10	9	7	8	9	9
6	7	8	10	9	10	10	8	9	10

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Xạ thủ Mai đã bắn bao nhiêu lần ?

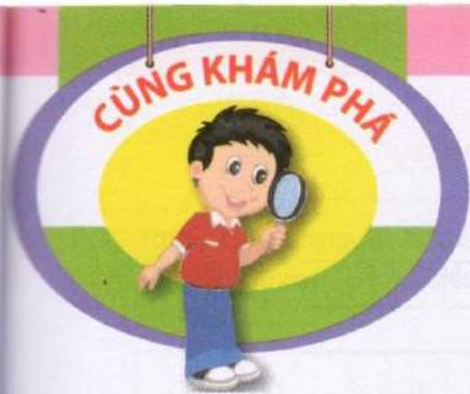
b) Lập bảng tần số.

c) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn bảng tần số trên.

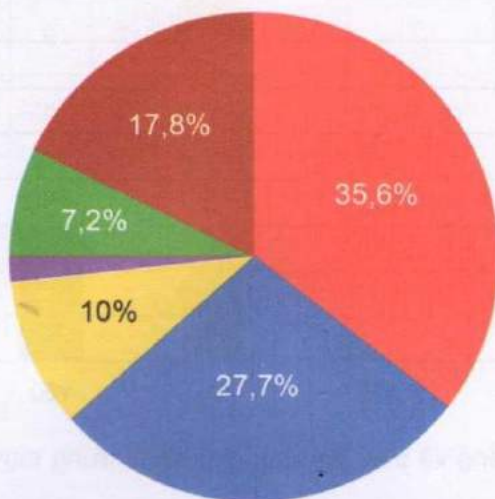


12. Hãy biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật kết quả phân loại học tập của học sinh Khối 7 Trường Lê Văn Tám được cho trong bảng sau :

Loại	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu	Kém
Số học sinh đạt	20	50	90	30	10



TẦN SUẤT VÀ BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT



◆ Tần suất

Các em đã học : Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện của giá trị đó trong dãy số liệu. Trong thực tế, người ta còn muốn biết tỉ lệ xuất hiện của giá trị đó và tính nó theo công thức $f = \frac{n}{N}$, trong đó :

N là số các giá trị ; n là tần số của một giá trị ; f được gọi là tần suất của giá trị đó.

Người ta thường biểu diễn tần suất dưới dạng tỉ số phần trăm.

Ví dụ :

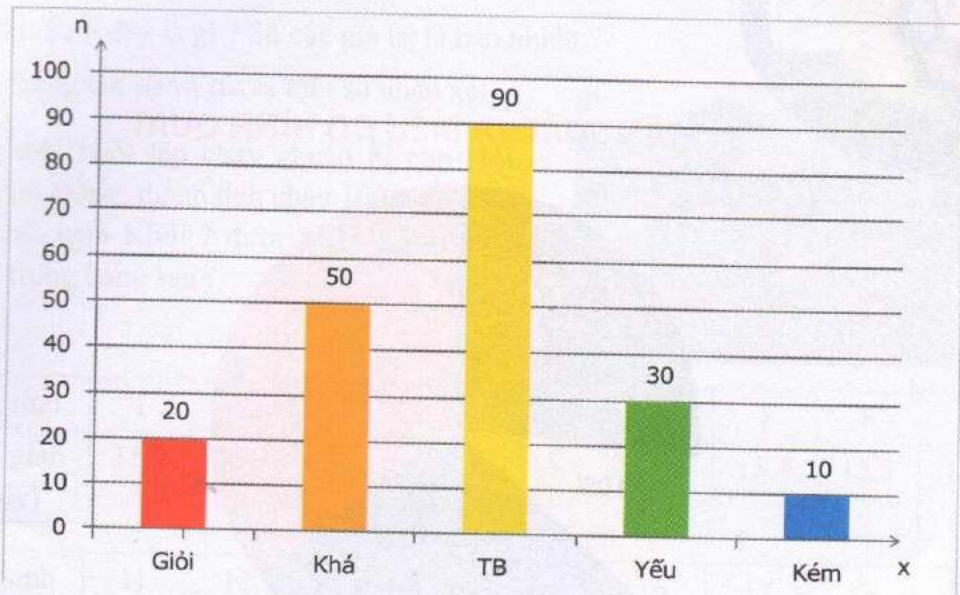
Kết quả xếp loại cuối học kì I của 200 học sinh Khối 7 trường Đoàn Kết là :

Giá trị (x)	Giỏi	Khá	TB	Yếu	Kém	
Tần số (n)	20	50	90	30	10	N = 200

Có thêm dòng tần suất như sau :

Giá trị (x)	Giỏi	Khá	TB	Yếu	Kém	
Tần số (n)	20	50	90	30	10	N = 200
Tần suất (f)	$\frac{20}{200}$ (10%)	$\frac{50}{200}$ (25%)	$\frac{90}{200}$ (45%)	$\frac{30}{200}$ (15%)	$\frac{10}{200}$ (5%)	100%

Bảng tần số trên có biểu đồ hình chữ nhật là :



Ngoài biểu đồ đoạn thẳng và biểu đồ hình chữ nhật, trong thực tế người ta còn dùng biểu đồ hình quạt.

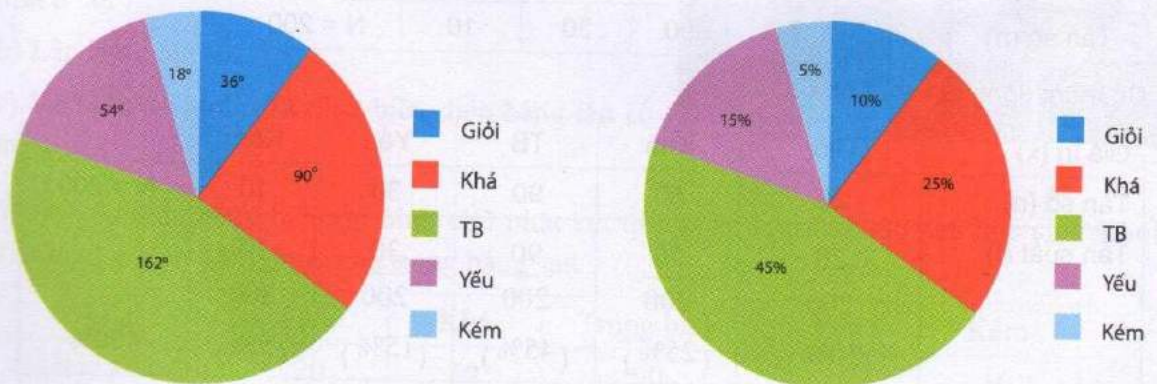
◆ Biểu đồ hình quạt

Đó là một hình tròn được chia thành các hình quạt mà góc ở tâm của các hình quạt tỉ lệ thuận với tần suất và được tính theo công thức : $\alpha = f\% \cdot 360^\circ$.

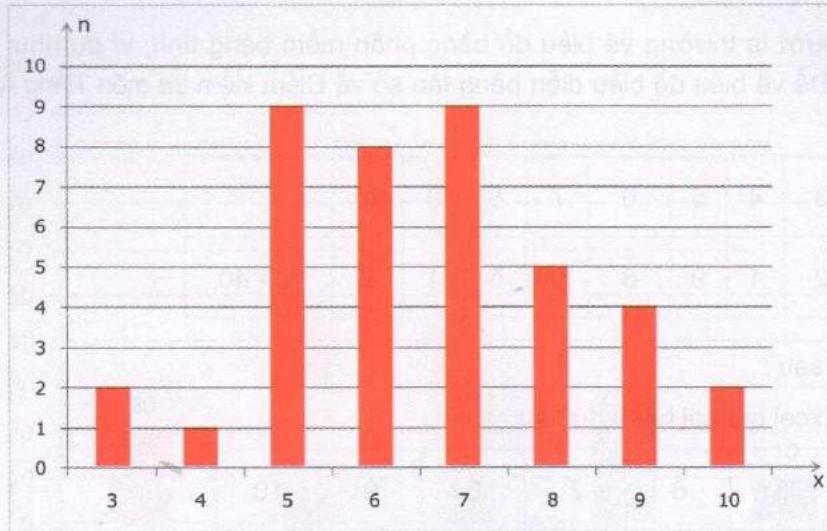
Ví dụ :

Tần suất (f)	$\frac{20}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{90}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{10}{200}$	
	(10%)	(25%)	(45%)	(15%)	(5%)	100%
Góc α	36°	90°	162°	54°	18°	360°

Biểu đồ hình quạt biểu diễn bảng tần suất trên là :



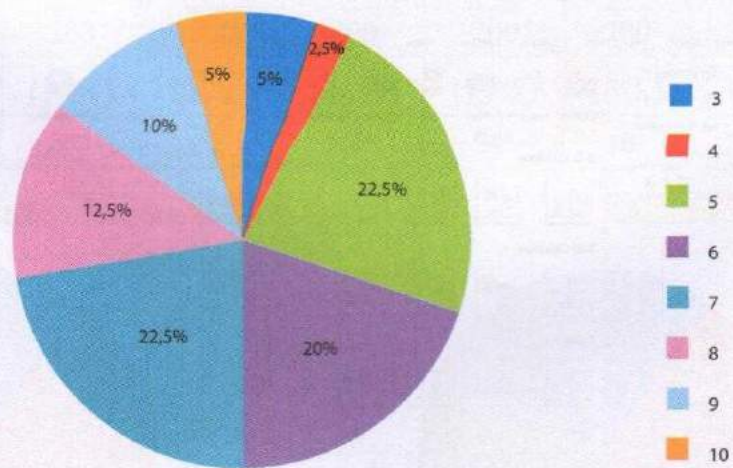
Ta được biểu đồ như sau :



Biểu đồ Điểm kiểm tra môn Tiếng Anh của học sinh lớp 7C.

Em cũng có thể lập bảng tần suất và vẽ biểu đồ hình quạt cho bài tập trên theo cách tương tự, chỉ cần thay thế lựa chọn Column bằng lựa chọn Pie.

3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	9	8	9	5	4	2
5%	2,5%	22,5%	20%	22,5%	12,5%	10%	5%



Chúc các em thành công !

TRUNG BÌNH CỘNG - MỐT

Trung bình cộng

MỐT



(nguồn : www.nuoi trong123.com)

Số liệu ghi nhận về năng suất lúa (tấn/hecta) vụ Hè Thu của 12 tỉnh đồng bằng sông Cửu Long như sau :

7,2	7,1	7	7,2	7,1	7,2	7,3	7	7,4	7,2	7	7,1
-----	-----	---	-----	-----	-----	-----	---	-----	-----	---	-----

Theo em, năng suất lúa trung bình vụ Hè Thu của các tỉnh khu vực đồng bằng sông Cửu Long là bao nhiêu ?



TRUNG BÌNH CỘNG

◆ Số trung bình cộng của dấu hiệu

Hoạt động 1



Hai phân xưởng A và B cùng ráp một loại áo xuất khẩu. Số áo ráp được của mỗi công nhân trong cùng một ngày của cả hai phân xưởng được ghi lại như sau :

Phân xưởng A :

8	8	12	10	11	8	12	9	9	10
11	12	8	8	10	9	10	8	6	8
12	10	9	14	14	12	10	10	12	10

Bảng 1

Phân xưởng B :

8	10	8	8	10	9	6	8	12	9
6	10	8	12	8	12	10	8	12	10
6	8	8	10	6	8	12	9	9	10

Bảng 2

Em hãy cho biết :

- Mỗi phân xưởng có bao nhiêu nhân công ?
- Trung bình trong từng phân xưởng, mỗi công nhân một ngày ráp được bao nhiêu cái áo ?

Hoạt động 2

Từ bảng 1, hãy lập bảng tần số và quan sát cách tính trung bình cộng từ bảng tần số theo phương pháp sau :

Phân xưởng A :

Số áo ráp được (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	Trung bình cộng
6	1	6	$\bar{X} = \frac{300}{30} = 10$
8	7	56	
9	4	36	
10	8	80	
11	2	22	
12	6	72	
14	2	28	
	N = 30	Tổng: 300	

Hãy tính trung bình cộng của các giá trị trong bảng 2 bằng cách điền vào bảng bên dưới :

Phân xưởng B :

Số áo ráp được (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	Trung bình cộng
			$\bar{X} = \frac{S}{N} =$
	N =	Tổng S =	

◆ Công thức tính trung bình cộng của dấu hiệu

Số trung bình cộng của một dấu hiệu (kí hiệu là \bar{X}) có thể được tính từ bảng tần số theo cách sau :

- Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
- Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
- Chia tổng đó cho số các giá trị (tức tổng các tần số).
- Ta có công thức tính trung bình cộng như sau :

$$\bar{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \dots + n_kx_k}{N}$$

Trong đó : x_1, x_2, \dots, x_k là các giá trị khác nhau của dấu hiệu X .

n_1, n_2, \dots, n_k là các tần số tương ứng.

N là số các giá trị $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Chú ý : Trong công thức trên, ta tính tổng số các giá trị giống nhau của dấu hiệu bằng cách lấy tích của giá trị ấy với số lần nó xuất hiện (nghĩa là tích của giá trị với tần số của nó).

Ví dụ :

Từ bảng tần số

Số áo ráp được (x)	Tần số (n)
6	4
8	10
9	4
10	7
12	5

ta tính được trung bình cộng :

$$\bar{X} = \frac{6.4 + 8.10 + 9.4 + 10.7 + 12.5}{30} = 9.$$

Chú ý :

Để có thể kiểm tra tính chính xác kết quả quá trình tính toán số trung bình cộng, ta nên sử dụng bảng như đã trình bày trong Hoạt động 2.



THỬ TÀI BẠN

Bạn Mai tự làm 15 đề Toán trong chương trình Violympic và đạt được số điểm như sau :

8	9	8	10	8
9	8	6	9	6
10	9	8	8	9

Em hãy lập bảng tần số và tính trung bình cộng điểm Toán của Mai.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Hùng nói : Giá trị trung bình luôn luôn là một phần tử của dãy giá trị của dấu hiệu.

Lan nói : Giá trị trung bình có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

Theo em, bạn nào đúng ?

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO



◆ Ý nghĩa của số trung bình cộng

Hoạt động 3

Thùng A chứa 20 trái thanh long xuất khẩu. Khối lượng từng trái (tính theo 100g) trong thùng được ghi lại trong bảng tần số sau :

Khối lượng (x)	Tần số (n)
4,2	1
4,3	2
4,4	4
4,5	8
4,6	2
4,7	2
5	1
	N = 20



Nhà vườn muốn đóng một thùng B gồm 20 trái thanh long “mẫu” để giới thiệu sản phẩm, mỗi trái đều cân nặng bằng nhau và tổng khối lượng thùng B bằng tổng khối lượng của thùng A. Như vậy, để được tuyển vào thùng B, mỗi trái thanh long phải có khối lượng là bao nhiêu ?

Hoạt động 4

Điểm kiểm tra 45 phút môn Tiếng Anh của hai lớp 7A và 7B được cô giáo ghi lại như sau :

Lớp 7A

10	7	5	4	6	5	7	8	9	6
5	6	6	5	7	8	4	5	6	9
4	5	8	8	6	5	5	7	4	6
9	7	5	5	6	4	5	6	5	7

Lớp 7B

9	6	6	5	7	8	4	5	6	9
8	6	8	9	7	8	9	10	8	4
9	5	8	8	10	8	5	7	10	6
9	7	5	5	6	9	5	6	8	9

Hãy tìm số trung bình cộng điểm kiểm tra môn Tiếng Anh của mỗi lớp.

Theo em, căn cứ vào điểm bài kiểm tra thì lớp nào có kết quả tốt hơn ?

Số trung bình cộng của dấu hiệu X đôi khi có thể lấy làm đại diện cho dấu hiệu đó khi cần phải trình bày một cách ngắn gọn (ví dụ khối lượng trung bình của mỗi trái thanh long trong thùng) hoặc khi phải so sánh với một dấu hiệu cùng loại (chẳng hạn, có thể so sánh trình độ học Tiếng Anh của hai lớp 7A và 7B qua điểm trung bình bài kiểm tra của mỗi lớp).

Hoạt động 5

Tiền đóng góp giúp đồng bào bị lũ lụt (đơn vị là nghìn đồng) của 10 học sinh trong tổ Một được ghi lại như sau :

5 10 10 15 10 10 10 20 10 500

Hãy tìm số tiền đóng góp trung bình của tổ Một. Theo em, giá trị trung bình vừa tìm được có thể xem như là “đại diện” cho dấu hiệu “số tiền đóng góp” của cả tổ này hay không ?

Chú ý :

- Khi các giá trị của dấu hiệu có khoảng chênh lệch rất lớn đối với nhau thì không nên lấy số trung bình cộng làm “đại diện” cho dấu hiệu đó.
- Số trung bình cộng thường không nằm trong dãy các giá trị của dấu hiệu.

Ví dụ :

Xét dấu hiệu X có dãy giá trị như sau :

1 1 2 1 100

Ta không thể lấy số trung bình cộng $\bar{X} = 21$ làm đại diện cho X vì giữa các giá trị của dấu hiệu X có sự chênh lệch rất lớn (giữa 100 với 1). Số 21 cũng không phải là một giá trị của dấu hiệu được liệt kê trong dãy giá trị trên.

MỐT

♦ Mốt của dấu hiệu

Hoạt động 6

Một cửa hàng bán đồng phục có ghi lại số bộ đồng phục đã bán trong tháng tựu trường theo cỡ đồng phục trong bảng sau :



Cỡ đồng phục (x)	22	23	24	25	26	27	
Số bộ đồng phục bán được (n)	15	30	210	95	60	10	N = 420

Theo em, cửa hàng nên quan tâm đến cỡ đồng phục nào nhất để nhập hàng về phục vụ học sinh ?

Mốt (Mode) của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số, kí hiệu là M_0 .

Trong một số trường hợp, mốt có thể lấy làm đại diện cho dấu hiệu.

Ví dụ :

Mốt của dấu hiệu “cỡ đồng phục” trong bảng số liệu trong Hoạt động 6 là 24 vì là giá trị có tần số lớn nhất (nhiều học sinh mua nhất). Như vậy cỡ 24 có thể được chọn làm đại diện cho dấu hiệu “cỡ đồng phục”.



THỬ TÀI BẠN

Tìm một của dấu hiệu “số tiền đóng góp giúp đồng bào bị lũ lụt” trong bảng thống kê sau (đơn vị là nghìn đồng) :

5	10	10	15	10	10	10	20	10	500
---	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

Em hãy lập bảng tần số và vẽ biểu đồ của dấu hiệu trên. Nhìn vào biểu đồ, em hãy chỉ ra cách để nhanh chóng tìm được Mốt của dấu hiệu trên biểu đồ hình chữ nhật cũng như trên biểu đồ hình quạt.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Hùng nói : Mốt luôn luôn là một phần tử của dãy giá trị của dấu hiệu.

Lan nói : Mốt có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

Bạn nào đúng ?

GHI NHỚ

1. Số trung bình cộng thường được dùng làm “đại diện” cho dấu hiệu của một tập hợp các đơn vị điều tra.
2. Khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại của những tập hợp các đơn vị điều tra khác nhau, ta thường so sánh số trung bình cộng của chúng.
3. Dựa vào bảng tần số, ta có thể tính số trung bình cộng của một dấu hiệu (gọi tắt là số trung bình cộng, kí hiệu \bar{X}) theo các bước sau :
 - Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
 - Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
 - Chia tổng đó cho số các giá trị (tức tổng các tần số).
 - Công thức tính số trung bình cộng của một dấu hiệu :

$$\bar{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \dots + n_kx_k}{N}$$

4. Khi các giá trị của dấu hiệu có khoảng chênh lệch rất lớn đối với nhau thì không nên lấy số trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu đó.
5. Trong trường hợp ta quan tâm đến giá trị nào xuất hiện nhiều nhất trong dãy các giá trị của dấu hiệu thì một thường được chọn làm đại diện cho dấu hiệu.
6. Mốt (Mode) của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số, kí hiệu là M_0 .

THƯ GIẢN

HOA TRONG TRƯỜNG EM

Để tìm hiểu loài hoa được yêu thích nhất trong trường, em có thể phỏng vấn 100 người bất kì, trong đó có quý thầy cô, cô chú nhân viên, các bạn học sinh thuộc đủ các khối lớp. Từ bảng số liệu ban đầu thu thập được, em hãy lập bảng tần số, vẽ biểu đồ và tìm một của dấu hiệu “Loài hoa được yêu thích nhất trong trường” theo mẫu mà bạn Liên đã thực hiện dưới đây :

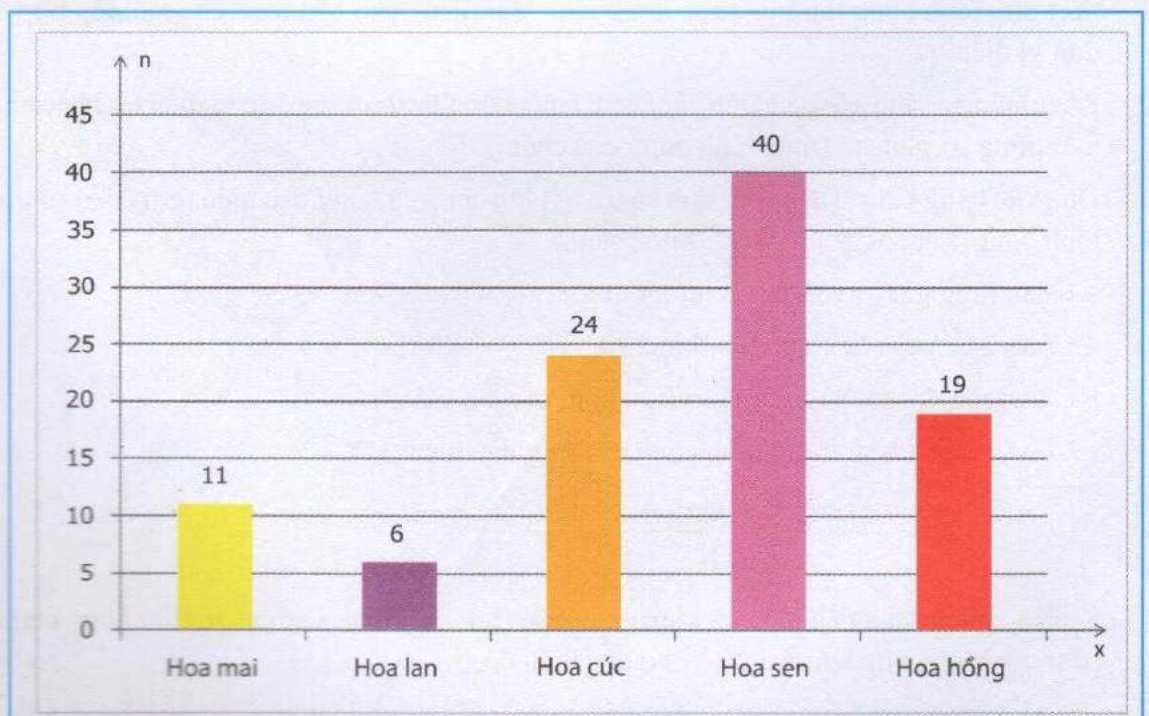
Bạn Liên đặt kí hiệu bằng số cho các loài hoa được yêu thích như sau :

	Hoa mai	Hoa lan	Hoa cúc	Hoa sen	Hoa hồng
Tên loài hoa					
Kí hiệu	1	2	3	4	5

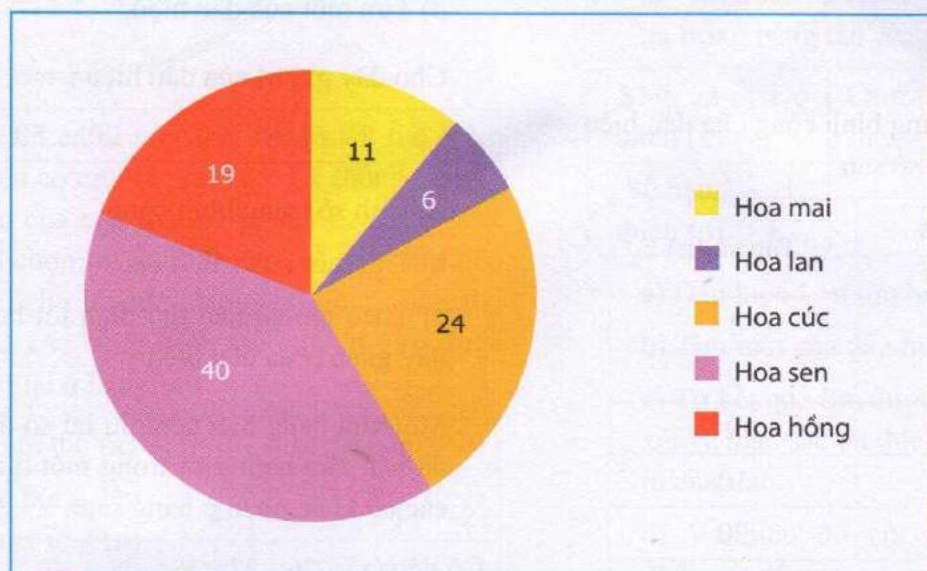
Ta có bảng tần số :

Loài hoa (x)	1	2	3	4	5	
Số người chọn (n)	11	6	24	40	19	N = 100

Biểu đồ hình chữ nhật :



Biểu đồ hình quạt :



Một cửa dấu hiệu chính là **Hoa sen**.

Vậy hoa sen là loài hoa được nhiều người trong trường bạn Liên yêu thích nhất.

BÀI TẬP

1. Hãy tính số trung bình cộng của dấu hiệu trong bảng tần số sau :

Điểm kiểm tra môn Toán (x)	Tần số (n)
2	1
3	2
4	2
5	10
6	20
8	2
9	2
10	1

2. Số năm làm việc của các nhân viên trong một công ti được ghi lại ở bảng sau :

6	5	1	2	6	6	4	8	6	6
2	4	6	8	4	6	10	6	6	2

- a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Lập bảng tần số.
 c) Tính số trung bình cộng.
 d) Tìm một của dấu hiệu.
3. Số học sinh vắng mặt trong ngày 19/10/2015 của 20 lớp trong Trường Kết Đoàn được ghi lại trong bảng sau :

2	1	4	0	0	2	1	4	2	1
0	0	1	0	2	1	0	1	0	0

- a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Lập bảng tần số và cho biết có bao nhiêu lớp không có học sinh nghỉ học trong ngày ?

- c) Tính số trung bình cộng.
 d) Tìm một của dấu hiệu.

4. Cho dãy giá trị của dấu hiệu :

6 6 7 6 8 6 6 20 50 100

- a) Tính số trung bình cộng.
 b) Tìm một của dấu hiệu.
 c) Theo em số nào đại diện tốt hơn cho dãy giá trị của dấu hiệu ?
5. Một cửa hàng bán dép ghi lại số đôi dép đã bán cho nam giới trong một quý theo các cỡ khác nhau ở bảng sau :

Cỡ dép (x)	36	37	38	39	40	41	42
Số đôi dép bán được (n)	21	32	95	230	110	52	4

- a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Tính số trung bình cộng.
 c) Tìm một của dấu hiệu.
6. Có 6 đội bóng tham gia giải bóng đá vòng tròn hai lượt đi về. Số bàn thắng trong các trận đấu của toàn giải được ghi lại như sau :

Số bàn thắng (x)	0	1	2	3	4	5	6
Tần số (n)		5	7	8	4	3	1

- a) Có tất cả bao nhiêu trận trong toàn giải ?
 b) Có bao nhiêu trận không có bàn thắng ?
 c) Tính số bàn thắng trung bình của một trận trong toàn giải.
 d) Tìm một của dấu hiệu.

LUYỆN TẬP

7. Đèn Led là một loại bóng đèn tiết kiệm điện có tuổi thọ rất cao. Để thống kê tuổi thọ của một loại bóng đèn Led, người ta đã chọn tùy ý 100 bóng và bật sáng liên tục cho tới lúc chúng tự hỏng. Tuổi thọ của các bóng (tính theo nghìn giờ) được ghi lại ở bảng sau :

Tuổi thọ (x)	30	40	50	60	70
Số bóng đèn tương ứng (n)	4	28	52	14	2



- a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Tính số trung bình cộng.
 c) Tìm mốt của dấu hiệu.

8. Theo dõi thời gian làm một bài toán (tính bằng phút) của 20 học sinh, thầy giáo lập được bảng sau :

Thời gian (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	1	1	1	3	5	2	3	2	1	1	N = 20

- a) Tính số trung bình cộng.
 b) Tìm mốt của dấu hiệu.

9. Tổ học tập của Lan gồm 12 bạn. Lan thống kê “Màu sắc ưa thích” của mỗi bạn và ghi lại trong bảng tần số sau :

Màu ưa thích (x)	Đỏ	Cam	Vàng	Xanh lá	Xanh dương
Số bạn thích (n)	1	1	2	7	1

- a) Dấu hiệu Lan tìm hiểu ở đây là gì ?
 b) Tìm mốt của dấu hiệu.
 c) Từ kết quả tìm được, em hãy viết nhận xét về màu sắc ưa thích của các bạn trong tổ của Lan.
 d) Vẽ biểu đồ cột để minh họa cho nhận xét đó.
10. Điểm kiểm tra môn Tiếng Anh của học sinh lớp 7C được cô giáo ghi lại trong bảng tần số sau :

Giá trị (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	1	9	8	9	5	4	2	N = 40

- a) Tính số trung bình cộng.
 b) Tìm mốt của dấu hiệu.
 c) Có bao nhiêu bạn đạt điểm 7 ?
 d) Số học sinh đạt điểm 8 trở lên chiếm tỉ lệ bao nhiêu ?

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1. Điểm kiểm tra môn Văn của lớp 7A được giáo viên ghi lại trong bảng sau :

STT	Điểm kiểm tra	STT	Điểm kiểm tra
1	8	21	8
2	6	22	6
3	9	23	6
4	7	24	6
5	5	25	8
6	4	26	6
7	6	27	8
8	8	28	6
9	7	29	5
10	6	30	7
11	5	31	6
12	8	32	5
13	9	33	6
14	5	34	7
15	7	35	6
16	6	36	9
17	6	37	9
18	5	38	8
19	9	39	8
20	5	40	6

- a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Lập bảng tần số.
 c) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật.

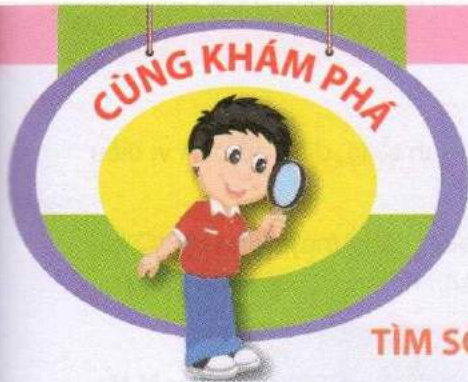
- d) Tính số trung bình cộng.
 e) Tìm mốt của dấu hiệu.

2. Điều tra năng suất lúa Đông Xuân năm 2015 của 12 tỉnh đồng bằng sông Cửu Long được cho trong bảng sau :

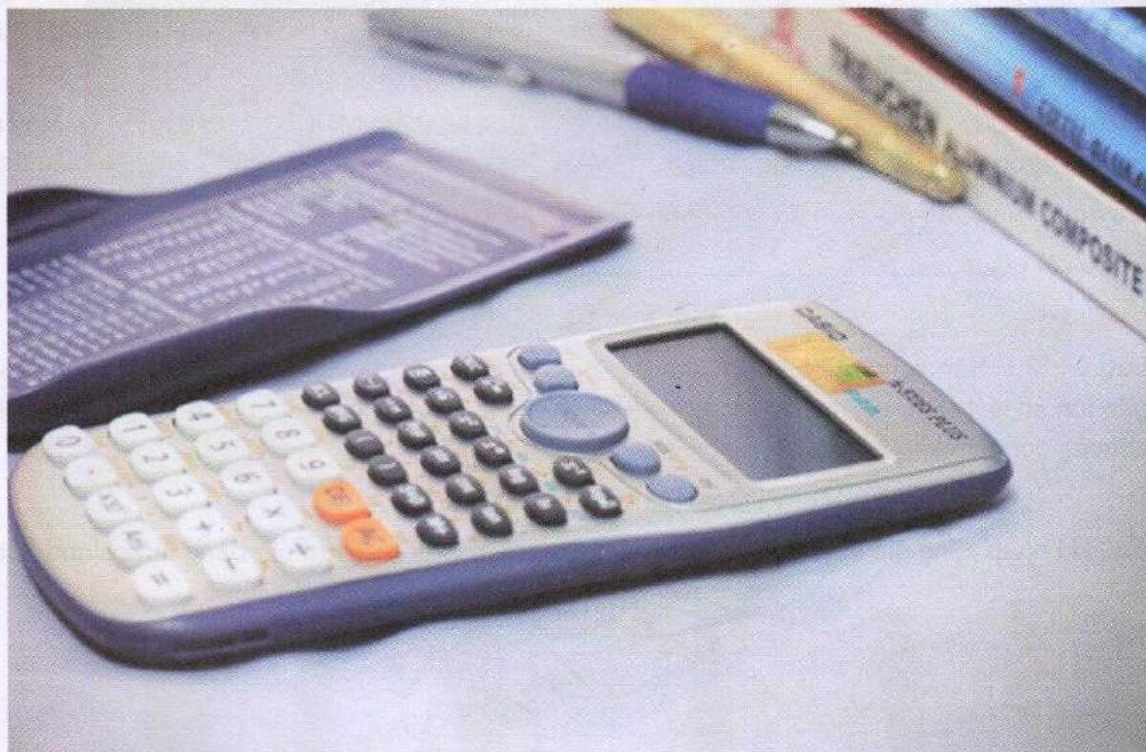
STT	Tỉnh	Năng suất (tấn/ha)
1	An Giang	7,6
2	Bến Tre	7,5
3	Bạc Liêu	7,6
4	Cà Mau	7,3
5	Đồng Tháp	7,8
6	Hậu Giang	7,5
7	Kiên Giang	7,5
8	Long An	7,2
9	Sóc Trăng	7,4
10	Tiền Giang	7,6
11	Trà Vinh	7,5
12	Vĩnh Long	7,5

- a) Lập bảng tần số.
 b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật.
 c) Tính số trung bình cộng.
 d) Tìm mốt của dấu hiệu.





TÌM SỐ TRUNG BÌNH CỦA BẢNG TẦN SỐ BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY



Các em có thể dùng máy tính cầm tay để tính giá trị trung bình trong một bảng tần số như sau :

Giá trị dấu hiệu (x)	Tần số (n)
5	1
7	2
8	3
9	1
10	1

Mặc dù máy tính cầm tay có nhiều loại khác nhau, tuy nhiên các bước cơ bản để thực hiện các bài toán thống kê trên các đời máy tính cầm tay đều như nhau :

Bước 1 : Bật máy.

Bước 2 : Thiết lập các thông số của chương trình thống kê.

Bước 3 : Chuyển máy tính sang chế độ thống kê.

Bước 4 : Nhập số liệu.

Bước 5 : Tính toán các giá trị thống kê như : tính số trung bình, tính tổng, đếm số đơn vị điều tra, ...

Sau đây, chúng tôi sẽ hướng dẫn chi tiết cách tính giá trị trung bình bằng máy tính CASIO fx-570ES PLUS.

Bước 1 : Bật máy (bấm phím ON).

Bước 2 : Thiết lập thông số của chương trình thống kê (bấm SHIFT MODE) ; bấm mũi tên (\rightarrow) tìm chương trình thống kê (4 : STAT). Máy sẽ hỏi bạn có nhập tần số hay không ? (FREQUENCY ?). Bạn nhập giá trị 1 để thiết lập chế độ thống kê có tần số, hoặc giá trị 2 để thiết lập chế độ thống kê không có tần số.

Bước 3 : Chuyển máy tính vào chế độ tính toán thống kê (bấm MODE, chọn 3 : STAT). Máy sẽ hỏi lựa chọn kiểu thống kê, bạn chọn 1 : 1-VAR để tính toán thống kê với 1 dấu hiệu điều tra.

Bước 4 : Vào chế độ nhập dữ liệu (bấm SHIFT 1, chọn 2 : Data).

Nhập cột giá trị của biến X

5 \equiv 7 \equiv 8 \equiv 9 \equiv 10 \equiv

Lưu ý : Khi nhập xong một giá trị, bạn phải bấm phím = để máy tính lưu giá trị đó và tự động gán tần số là 1. Sau khi nhập xong cột giá trị, bạn sẽ sử dụng các phím mũi tên để chuyển cột, chuyển dòng và tiến hành nhập các giá trị tần số tương ứng.

1 \equiv 2 \equiv 3 \equiv 1 \equiv 1 \equiv

Sau khi nhập xong giá trị và tần số tương ứng, trong máy tính sẽ lưu giữ bảng tần số như sau :

x	Tần số (n)
5	1
7	2
8	3
9	1
10	1

Thoát khỏi chế độ nhập dữ liệu : bấm AC.

Bước 5 :

- Tính trung bình : bấm SHIFT 1, chọn 4 : Var, sau đó chọn 2 : \bar{x} , bấm \equiv , máy tính sẽ cho ra kết quả $\bar{X} = 7,75$.
- Tính tổng : bấm SHIFT 1, chọn 3 : Sum, sau đó chọn 2 : $\sum x$, bấm \equiv , máy tính sẽ cho ra kết quả $\sum x = 62$.
- Tính số đơn vị điều tra : bấm SHIFT 1, chọn 4 : Var, sau đó chọn 1 : n, bấm \equiv , máy tính sẽ cho ra kết quả $n = 8$.

Bước 6 : Trong trường hợp bạn cần xem lại dữ liệu hoặc nhập dữ liệu mới, bấm SHIFT 1, chọn 2 : Data.

Bước 7 : Để thoát chế độ tính toán thống kê, trả máy tính lại chế độ tính toán thông thường, bạn bấm Mode 1.

Chúc các em thành công !

TÌM HIỂU CHIỀU DÀI TRUNG BÌNH CỦA CÔN TRÙNG

Các em có thể vận dụng các kiến thức thống kê đã học ở chương 3 để tìm hiểu về các loài côn trùng quen thuộc quanh nhà như bướm bướm, ve sầu, châu chấu, xén tóc ...



Bước 1 : Sưu tầm các mẫu xén tóc.



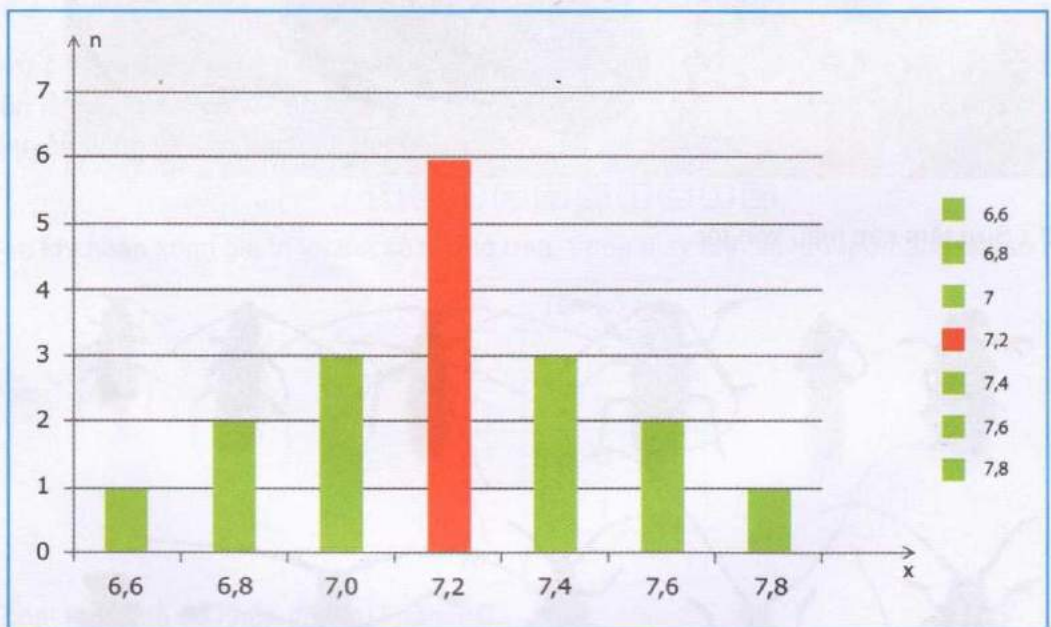
Bước 2 : Tiến hành đo chiều dài (đơn vị cm) các mẫu, thu thập bảng số liệu ban đầu.

6,6	6,8	7	7,2	7,4	7,4
7	7,2	6,8	7,4	7,2	7,2
7,8	7,2	7,6	7	7,6	7,2

Bước 3 : Lập bảng tần số, tính giá trị trung bình.

Chiều dài (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	Trung bình cộng
6,6	1	6,6	$\bar{X} = \frac{S}{N} = 7,2$
6,8	2	13,6	
7	3	21	
7,2	6	43,2	
7,4	3	22,2	
7,6	2	15,2	
7,8	1	7,8	
	N = 18	S = 129,6	

Bước 4 : Viết nhận xét, báo cáo, vẽ biểu đồ minh họa và đưa ra kết luận.



Bước 5 : Tự đánh giá về việc vận dụng kiến thức, kỹ năng thống kê.

CHƯƠNG

4

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

- Khái niệm về biểu thức đại số –
Giá trị của biểu thức đại số
- Đơn thức
- Đa thức



(nguồn : www.nasa.gov)

Ước mơ lớn nhất của con người là chinh phục được vũ trụ bao la !

Các nhà khoa học đã tính toán được quỹ đạo của vệ tinh bay trong không gian bằng các biểu thức đại số.

Hình trên minh họa một vệ tinh địa tĩnh phục vụ trong hệ thống định vị toàn cầu GPS.

CHỦ ĐỀ

9

KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ - GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Khái niệm về biểu thức đại số

Giá trị của biểu thức đại số

Chuyển các tình huống thực tế sang biểu thức đại số



Hình hộp chữ nhật có thể tích $V = d \cdot r \cdot c$ (d : chiều dài, r : chiều rộng, c : chiều cao).
Bể bơi trong hình là một hình hộp chữ nhật có chiều dài là 15m, chiều rộng 5m, chiều cao (độ sâu) 1,8
Hỏi thể tích của bể bơi này là bao nhiêu ?



KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

◆ Biểu thức số. Biểu thức đại số. Biến số

Ta đã biết các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa) làm thành một biểu thức.

Chẳng hạn : $4 - 7 + 3$; $15 : 3.2$; $3^4 - 6$; $3.(6^2 - 5)$ là những biểu thức.

Những biểu thức trên còn gọi là **biểu thức số**.

Ví dụ :

Năm nay Nam 12 tuổi. Sau 5 năm, tuổi của Nam là : $12 + 5 = 17$ (tuổi).

$12 + 5$ gọi là **biểu thức số**.

Hoạt động

1

Sân chơi trường của Nam có chiều dài 50m, chiều rộng 30m.

Hãy viết biểu thức số biểu thị chu vi sân chơi trường của Nam.

Hoạt động

2

Em hãy viết các biểu thức biểu thị các đối tượng được nhắc đến trong những trường hợp sau :

SEA Games 28 có tất cả 11 đoàn thể thao đăng kí tham gia bộ môn Bóng đá nam, mỗi đội bóng được đăng kí danh sách 20 cầu thủ. Hỏi tổng số cầu thủ có đăng kí tham gia môn Bóng đá nam tại SEA games 28 là bao nhiêu ?



Một cây tre dài x mét được cưa thành 15 khúc bằng nhau. Hỏi mỗi khúc dài bao nhiêu mét ?



Tính chu vi của mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài x (m) và chiều rộng y (m).



Quan sát các biểu thức vừa viết ở trên, hãy cho biết: biểu thức nào là biểu thức số, biểu thức nào có chứa chữ ?

Những biểu thức bao gồm các số hoặc **chữ** (đại diện cho số), được nối với nhau bởi các kí hiệu phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa được gọi là **biểu thức đại số**.

Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho các số tùy ý nào đó. Người ta gọi những chữ như vậy là **biến số** (hay gọi tắt là **biến**).

Ví dụ :

$2.x^3 + 3xy$ là biểu thức đại số, hai biến là x và y .

$5.(2a - \frac{1}{2}b)$ là biểu thức đại số, hai biến là a và b .

◆ Cách viết một biểu thức đại số

Để cho gọn, khi viết một biểu thức đại số, ta có một số quy ước sau :

– Không viết dấu nhân giữa các chữ, cũng như giữa số và chữ. Trong một tích ta viết số trước chữ sau.

Ví dụ : Thay vì viết $x.y$ ta viết xy , thay vì viết $5.x$ ta viết $5x$, thay vì viết $x6$ ta viết $6x$.

Quy ước : $1xy = xy$

$$-1xy = -xy$$

– Trong biểu thức đại số, vì chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ và số ta cũng áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên số, kể cả dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.

Ví dụ : $x + y = y + x$; $xy = yx$; $xxxx = x^4$;

$$(x + y) + z = x + (y + z) ; x(y + z) = xy + xz ; x(y - z) = xy - xz.$$



THỬ TÀI BẠN

Hãy viết lại các biểu thức sau cho gọn hơn :

a) $x3y + 5.y.z$;

b) $(-1)a.b + 1a^2b^3$.



GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Ta đã biết biểu thức tính diện tích S của hình chữ nhật với chiều dài x và chiều rộng y là :

$$S = xy$$

Để tính diện tích S của hình chữ nhật có chiều dài 120m và chiều rộng 40m, ta thay $x = 120$, $y = 40$, khi đó : $S = 120.40 = 4800$ (m²).

Ta nói : 4800 là **giá trị của biểu thức** xy tại $x = 120$ và $y = 40$,

hay **giá trị của biểu thức** xy tại $x = 120$ và $y = 40$ là 4800,

hay tại $x = 120$ và $y = 40$ thì **giá trị của biểu thức** xy là 4800.

Ví dụ : Tính giá trị của biểu thức $2p + 5$ tại $p = 1$ hoặc $p = 3$.

– Thay $p = 1$ vào biểu thức $2p + 5$ ta có : $2.1 + 5 = 7$.

Vậy giá trị của biểu thức $2p + 5$ tại $p = 1$ là 7.

– Thay $p = 3$ vào biểu thức $2p + 5$ ta có : $2.3 + 5 = 11$.

Vậy giá trị của biểu thức $2p + 5$ tại $p = 3$ là 11.

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại giá trị của các biến, ta thay các giá trị đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ :

Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $8p^3 + 3$ tại $p = 3$.

b) $2q^2 + 3r$ tại $q = 2, r = -1$.

Giải

a) Tại $p = 3$, ta có :

$$\begin{aligned}8p^3 + 3 &= 8(3)^3 + 3 \\ &= 216 + 3 \\ &= 219.\end{aligned}$$

b) Tại $q = 2$ và $r = -1$, ta có :

$$\begin{aligned}2q^2 + 3r &= 2.2^2 + 3.(-1) \\ &= 8 - 3 = 5.\end{aligned}$$

Hoạt động 3

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2}{3}p - 3q^2$ tại $p = 3, q = -3$.

THƯ GIÃN

ỨNG DỤNG CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ – CÔNG THỨC

Biểu thức đại số có nhiều ứng dụng trong việc giải toán, đặc biệt là các bài toán trong thực tế cuộc sống.

• Trong bộ môn Hình học, công thức tính diện tích, thể tích, chu vi cũng là biểu thức đại số.

Chẳng hạn, công thức tính diện tích của hình thang là $\frac{(x+y).h}{2}$ với x là đáy lớn, y là đáy nhỏ, h là chiều cao. Nhờ công thức này em có thể tính được diện tích của một hình thang bất kì khi biết đáy lớn, đáy nhỏ và chiều cao.

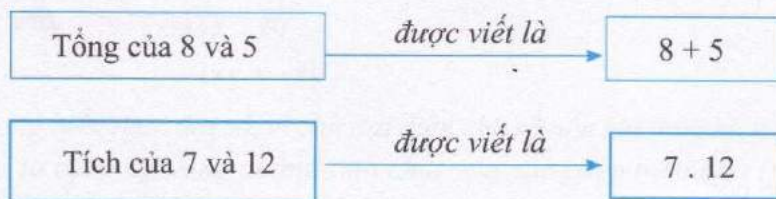
• Để đo nhiệt độ, không phải tất cả các nước trên thế giới đều dùng một thang đo chung. Chẳng hạn, ở Việt Nam dùng thang đo độ Celcius, trong khi ở Mỹ dùng thang đo độ Fahrenheit. Để thuận tiện cho việc chuyển đổi giữa hai thang đo, người ta phải lập công thức thiết lập mối liên hệ giữa hai thang đo $^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9}^{\circ}\text{C} + 32$. Nhờ công thức này mà việc tính toán chuyển đổi giữa hai thang đo được dễ dàng.

• Ánh Viên là một vận động viên bơi lội Việt Nam đã và đang gặt hái nhiều thành tích trong khu vực và trên thế giới. Theo Hội bơi lội của Mỹ, để việc tập luyện đạt kết quả cao, nhiệt độ của hồ bơi phải được điều chỉnh phù hợp với lứa tuổi, chức năng tập luyện. Đối với vận động viên, nhiệt độ thích hợp của hồ bơi là $82 - 84$ độ F. Như vậy, khi luyện tập ở Việt Nam, Ánh Viên phải chỉnh nhiệt độ hồ bơi là bao nhiêu độ C ?



CHUYỂN CÁC TÌNH HUỐNG THỰC TẾ SANG BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Chúng ta đã biết cách chuyển các phát biểu toán học sang biểu thức số như sau :



Tương tự, tổng của hai số x và y được viết là $x + y$, hiệu của x và y được viết là $x - y$.

Các biểu thức đại số cũng được dùng để biểu thị một số tình huống thực tế xảy ra trong đời sống hằng ngày. Chẳng hạn :

- Mỗi buổi sáng Nam đi bộ được nhiều hơn Xuân 2 km. Xuân đi bộ được x km. Vậy Nam đi được $2 + x$ (km).
- Số tiền mỗi đợt gửi xe đạp là 1000 đồng. Như vậy x lần gửi xe mất $1000x$ đồng.

Hoạt động

4

Dùng biểu thức toán học để biểu thị các tình huống sau :

- a) Một cuốn tập giá y đồng. Hỏi 15 cuốn tập như thế giá bao nhiêu ?
- b) Một chiếc xe đã chạy x giờ với vận tốc y km/h. Hỏi quãng đường mà xe đã chạy ?
- c) Năm nay ông Ba x tuổi. Hỏi 12 năm trước ông Ba bao nhiêu tuổi ?
- d) Năm nay Hà x tuổi. Bé Bi kém Hà 3 tuổi. Mẹ của Hà gấp 4 lần tuổi bé Bi. Hỏi mẹ của Hà bao nhiêu tuổi ?



THỬ TÀI BẠN

Tiết kiệm điện

Để động viên toàn dân tiết kiệm điện, nhà nước quy định mức giá khác nhau cho từng loại tiêu thụ. Tiêu thụ điện càng nhiều thì giá tiền càng cao. Theo quy định này, mức đầu tiên từ

1 kWh (kiloat giờ) đến 50 kWh là x đồng / 1 kWh; mức thứ hai từ 51 kWh đến 100 kWh tăng thêm y đồng / 1 kWh so với mức đầu tiên; mức thứ ba từ 101 kWh đến 200 kWh tăng thêm z đồng / 1 kWh so với mức thứ hai.

Tháng 6 năm 2015, gia đình Nam tiêu thụ 125 kWh. Nhờ tiết kiệm, tháng 7 năm 2015, gia đình Nam chỉ tiêu thụ 75 kWh. Hãy viết biểu thức tính giá tiền điện của gia đình Nam trong tháng 6 và tháng 7.



Hoạt động 5

Hãy viết biểu thức đại số biểu thị :

- a) Hiệu của x và y.
- b) Tích của x và y.
- c) Tích của hiệu x và y với tổng của x và y.



THỬ TÀI BẠN

Hãy chuyển biểu thức sau thành các phát biểu toán học :

- a) $3(x - y)$.
- b) $(x - y)^3$.

Hoạt động 6

CÙNG CHƠI VỚI BIỂU THỨC

Mỗi nhóm có hai học sinh. Trò chơi được tiến hành như sau:

Học sinh 1 : Nhận được một biểu thức đại số từ giáo viên và chuyển thành phát biểu toán học.

Học sinh 2 : Chuyển phát biểu toán học của học sinh 1 sang biểu thức đại số.

Nhóm nào nêu được chính xác biểu thức đại số được giao lúc đầu sẽ được nhận phần thưởng.

COLORING BOOK



GHI NHỚ

1. Những biểu thức gồm các số và **chữ** (đại diện cho số) cùng các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa gọi là **biểu thức đại số**.
2. Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho các số tùy ý nào đó. Các chữ như vậy được gọi là **biến số** (hay gọi tắt là **biến**).
3. Để tính **giá trị** của một biểu thức đại số tại giá trị của các biến, ta thay các giá trị đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

CÙNG KHÁM PHÁ



DÙNG BIỂU THỨC ĐẠI SỐ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

Biểu thức đại số ra đời giúp con người giải được nhiều bài toán trong thực tế một cách thuận tiện. Một số bài toán hình học cũng được giải bằng cách dùng biểu thức đại số.

Tính cạnh của tam giác cân

Cho hình vuông có cạnh bằng 6 (đơn vị chiều dài). Dựng một tam giác cân có cạnh đáy là cạnh của hình vuông. Tính chiều dài cạnh bên của tam giác cân để chu vi hình tam giác bằng chu vi hình vuông.

Giải

Gọi cạnh bên của tam giác là x , ta có:

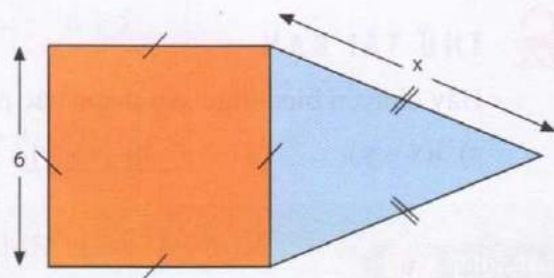
Chu vi của tam giác là $2x + 6$.

Chu vi của hình vuông là 24.

Vì chu vi hình tam giác bằng chu vi hình vuông nên :

$$2x + 6 = 24$$

$$x = 9.$$

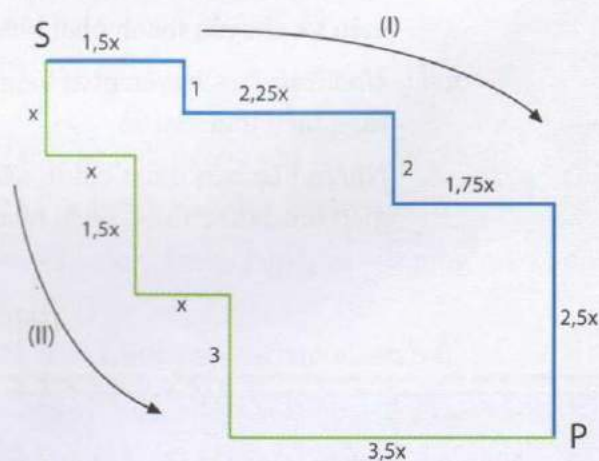


Tìm quãng đường đi

Quan sát hình vẽ, chúng ta thấy có hai con đường để đi từ S đến P.

- Hãy tính độ dài đường số (I) theo x .
- Hãy tính độ dài đường số (II) theo x .
- Nhận xét gì về độ dài của hai con đường này? Hãy giải thích.

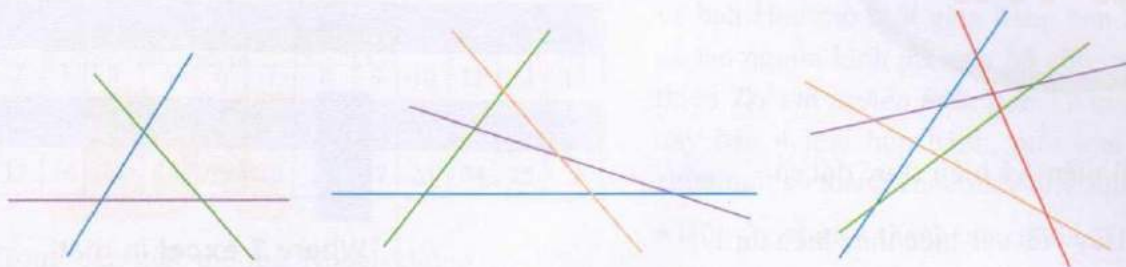
Một số bài toán mới nhìn qua là bài toán hình học, nhưng trong quá trình giải phải kết hợp cả các tính chất của hình học với tính toán và suy luận để tìm ra lời giải của bài toán. Dưới đây là một vài ví dụ :



Nhiều nhất bao nhiêu giao điểm ?

- Cho 3 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm ?
- Cho 4 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm ?
- Cho 5 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm ?

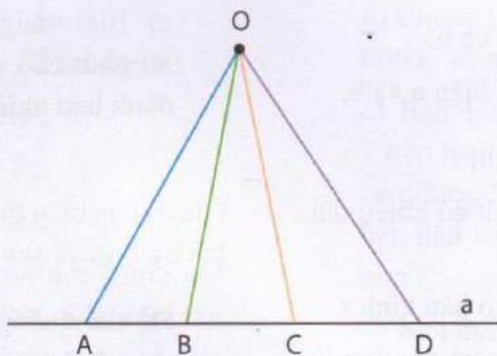
d)* Với n đường thẳng đôi một cắt nhau, em dự đoán xem có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?



Gợi ý : Với 5 đường thẳng chúng ta có thể dùng hình vẽ để kiểm tra được, nhưng với 20 đường thẳng, 100 đường thẳng hoặc nhiều hơn ... chúng ta không thể đếm để kiểm tra được, mà phải dùng cách khác.

Bao nhiêu tam giác ?

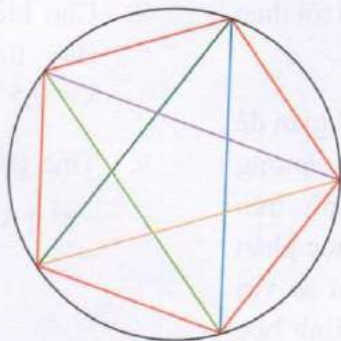
Cho 4 điểm phân biệt trên đường thẳng a . Một điểm O nằm ngoài đường thẳng a . Nối O với các điểm trên đường thẳng. Hỏi có tổng cộng bao nhiêu tam giác được tạo thành ?



Mở rộng bài toán với n điểm trên đường thẳng a và một điểm O nằm ngoài. Em có thể dự đoán được có tổng cộng bao nhiêu tam giác được tạo thành ?

Bao nhiêu dây cung ?

Trên một đường tròn, ta có thể kẻ 1 dây cung nối 2 điểm với nhau. Với 3 điểm khác nhau trên đường tròn, ta kẻ được 3 dây cung. Như vậy, với 4, 5 điểm trên đường tròn, có bao nhiêu dây cung được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau ?



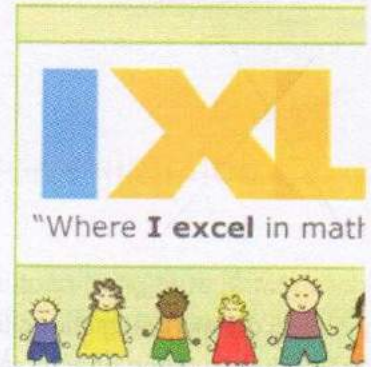
*Với n điểm trên đường tròn, hãy tìm biểu thức để tính số dây cung theo n .

Theo em, có mối liên hệ nào giữa ba bài toán **Điểm**, **Tam giác** và **Dây cung** nêu trên ?

BÀI TẬP

Khái niệm về biểu thức đại số

- Hãy viết các biểu thức biểu thị :
 - Chu vi hình chữ nhật có chiều rộng là 5 m và chiều dài hơn chiều rộng 2 m.
 - Diện tích của hình chữ nhật có chiều dài là x (m), chiều dài hơn chiều rộng 3 m.
- Hãy viết các biểu thức đại số biểu thị :
 - Hiệu bình phương của a và b .
 - Bình phương của hiệu a và b .
 - Tích của tổng a và b với hiệu a và b .
- Viết biểu thức đại số biểu thị :
 - Chu vi của hình chữ nhật có chiều dài là a , chiều rộng là b .
 - Chu vi của đường tròn có bán kính r .
 - Diện tích của hình thang có đáy lớn là a (cm), đáy nhỏ là b (cm), chiều cao là 1 cm.
- Ở thành phố Đà Lạt, buổi sáng nhiệt độ là x độ, buổi trưa nhiệt độ tăng y độ so với buổi sáng, đến chiều tối nhiệt độ lại giảm z độ so với buổi trưa. Hãy biểu thị nhiệt độ của thành phố Đà Lạt vào buổi tối theo các giá trị x , y và z .
- Mỗi tuần bạn Nam đều dành thời gian để học với chương trình IXL, một chương trình học Toán bằng Tiếng Anh trên mạng. Bạn Nam dành x phút để học phần Suy luận, dành nhiều hơn 4 phút so với thời gian học Suy luận để học Hình học và dành gấp đôi thời gian học Hình học để học Đại số.



- Hãy viết biểu thức tính thời gian Nam dành cho mỗi môn học.
- Viết biểu thức tính thời gian Nam dành cho cả ba môn học.
- Biết rằng Nam đã mất tổng cộng 80 phút cho cả ba môn học. Hỏi bạn ấy dành bao nhiêu phút cho mỗi môn học ?

Giá trị của biểu thức đại số. Chuyển các tình huống thực tế sang biểu thức đại số

- Độ dài quãng đường được tính theo vận tốc và thời gian bằng công thức $s = vt$. Hãy tính độ dài quãng đường khi biết $v = 45$ km/h và $t = 3h30'$.
- Tính giá trị của biểu thức sau tại $m = -2$ hoặc $m = 3$.
 - $3m^3 - m^2 + 1$;
 - $-m^2 + 3$.
- Cho biểu thức $B = -x^2 + 2xy + y^2 - 1$. Hãy tính giá trị của biểu thức B tại $x = 0,5$ và $y = 2$.
- Tính giá trị của biểu thức $-x^2 + x(y^2 + xy) + 1$ tại $x = -2$ và $y = 1$.

10. Giải mật mã :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Trong các giải thưởng Nobel không có giải thưởng dành cho Toán học. Vì vậy người ta đã tổ chức một giải thưởng khác dành cho Toán học. Các em hãy tính giá trị của các biểu thức sau để biết giải thưởng Toán học được nhắc đến ở đây là giải thưởng nào ?

$$2x^2 - 2 \text{ tại } x = 2 ;$$

$$|3x^3 - 5x^2 - 1| \text{ tại } x = -1 ;$$

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 32 \text{ tại } x = 4 ;$$

$$1000x^3 + 18 \text{ tại } x = 0,1 ;$$

$$(x + 1)(x + 2) \text{ tại } x = 2 ;$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 4 \text{ tại } x = -1.$$

Tiếp theo, tìm các chữ cái tương ứng với sáu giá trị vừa nhận được. Sắp xếp các chữ cái đó, em sẽ tìm được tên của giải thưởng Toán học phải tìm.

Gợi ý : Một nhà toán học trẻ Việt Nam đã đạt được giải thưởng này.

11. Trong một lễ hội, lớp 7A của bạn Lan và bạn Hoa mở một gian hàng bán bánh để tạo nguồn kinh phí ủng hộ cho quỹ từ thiện *Trẻ em nghèo hiếu học*. Gian hàng này bán 4 loại hộp bánh, mỗi loại hộp chứa một số thanh chocolate như sau :

- Hộp A : chứa x thanh chocolate.
- Hộp B : chứa nhiều hơn hộp A là 2 thanh chocolate.
- Hộp C : chứa gấp 3 lần hộp B.
- Hộp D : chứa gấp 3 lần hộp A và thêm 6 thanh chocolate nữa.

a) Hãy biểu diễn số thanh chocolate chứa trong mỗi hộp A, B, C, D theo x .

b) Chứng tỏ rằng số thanh chocolate trong hộp C và hộp D bằng nhau.

c) Bạn Lan đã bán được 5 hộp loại A, 2 hộp loại B và 1 hộp loại C. Bạn Hoa đã bán được 5 hộp loại A, 5 hộp loại B. Hỏi bạn nào bán được nhiều thanh chocolate hơn ?

d) Mỗi thanh chocolate có giá 15 000 đồng. Hộp A chứa 12 thanh chocolate. Hỏi giá tiền của mỗi hộp A, B, C, D ?

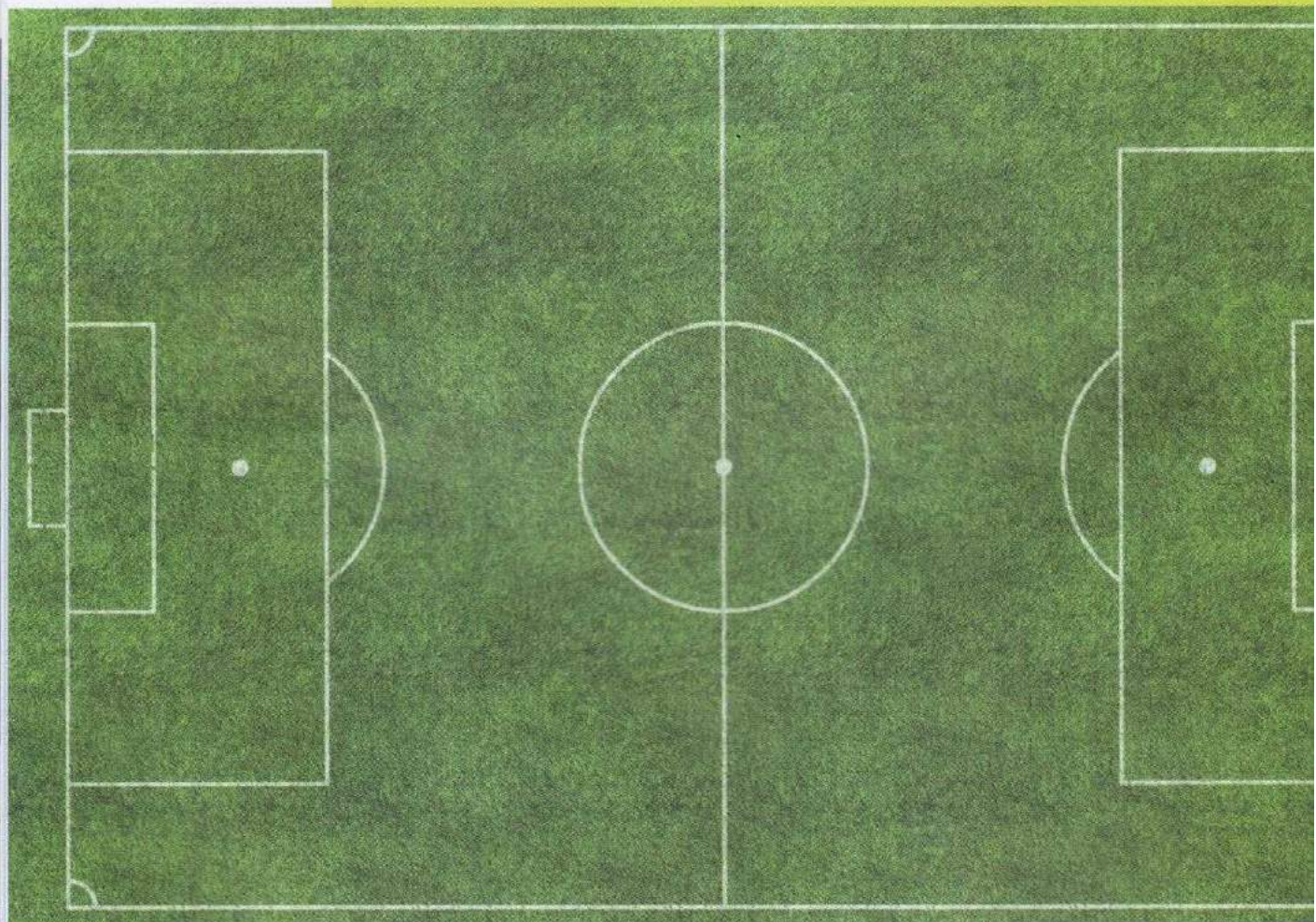
CHỦ ĐỀ

10

ĐƠN THỨC

Đơn thức

Đơn thức đồng dạng



Một sân bóng đá lát cỏ nhân tạo có chiều dài x (m), chiều rộng y (m). Tiến công lát một mét vuông cỏ nhân tạo là 450 ngàn đồng. Như vậy, chi phí để lát toàn bộ sân bóng bằng cỏ nhân tạo là bao nhiêu :



ĐƠN THỨC

◆ Khái niệm đơn thức

Hoạt động 1

Cho các biểu thức đại số :

$$2x + 1; \quad \frac{1}{5}xy^2; \quad -\frac{1}{5}xzy^2; \quad 2 - 3y; \quad 2x(-3y)z.$$

Hãy sắp xếp chúng thành hai nhóm :

Nhóm 1 : Những biểu thức có chứa phép cộng, phép trừ.

Nhóm 2 : Các biểu thức còn lại.

Các biểu thức trong nhóm 2 là những ví dụ về *đơn thức*.

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

Chú ý : Số 0 được gọi là *đơn thức không*.

Ví dụ :

- Các biểu thức 5 ; 0 ; $2x$; $-3y^2$; $\frac{2}{5}xyz$; $2x(-3)xy$ là những đơn thức.
- Các biểu thức $2 + 5x$; $2xy - 3yz$; $5xyz + 4$ không phải là các đơn thức.

◆ Đơn thức thu gọn

Hoạt động 2

Điền vào ô trống cho thích hợp :

$$3y^3(2x^2)z = \square x^{\square}y^{\square}z^{\square}$$

$$2y^3(3x^2z) = \square x^{\square}y^{\square}z^{\square}$$

$$z(6x^2y^3) = \square x^{\square}y^{\square}z^{\square}$$

Cả ba đơn thức $3y^3(2x^2)z$, $2y^3(3x^2z)$ và $z(6x^2y^3)$ đều bằng $6x^2y^3z$.

Ta nói $6x^2y^3z$ là *đơn thức thu gọn* của ba đơn thức này với 6 là *hệ số*, x^2y^3z là *phần biến*.

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, trong đó mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Ví dụ :

- $12x^5y^6z^3$ là đơn thức thu gọn ; có hệ số là 12 và phần biến là $x^5y^6z^3$.
- Đơn thức xyx không phải là đơn thức thu gọn.



THỬ TÀI BẠN

Trong các đơn thức dưới đây, đơn thức nào là đơn thức thu gọn (hãy chỉ rõ phần hệ số và phần biến của các đơn thức thu gọn) :

$$-\frac{2}{5}x^3z^4 ; yzy ; 2 ; -x^{12}z^5.$$

Chú ý :

- Một số cũng được coi là một đơn thức thu gọn.
- Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần.
- Thông thường, ta viết phần hệ số trước, phần biến sau và các biến được viết theo thứ tự bảng chữ cái.
- Từ nay, khi nói đến đơn thức nếu không nói gì thêm, ta hiểu đó là đơn thức thu gọn.

Ví dụ :

Thu gọn các đơn thức sau :

a) $3x^3y^2x$; b) $-2yxzx^2$.

Giải

a) $3x^3y^2x = 3x^3xy^2$ (sắp xếp biến x)
 $= 3x^4y^2$ (thực hiện phép nhân x^3 với x).

b) $-2yxzx^2 = -2yxx^2z$ (sắp xếp biến x)
 $= -2yx^3z$ (thực hiện phép nhân x với x^2)
 $= -2x^3yz$ (viết các biến theo thứ tự bảng chữ cái).



THỬ TÀI BẠN

Thu gọn hai đơn thức sau :

a) $-2zx^3y^2xy$; b) $5y2xzx^2y^3$.

♦ Bậc của đơn thức

Hoạt động 3

Cho đơn thức $3x^5y^8z$, hãy điền vào bảng sau :

Biến	x	y	z
Số mũ			

Đơn thức $3x^5y^8z$ có tổng số mũ là $5 + 8 + 1 = 14$.

Ta nói đơn thức $3x^5y^8z$ có bậc là 14.

Bậc của một đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

- Số thực khác 0 là đơn thức có bậc bằng 0.
- Số 0 là đơn thức không có bậc.



THỬ TÀI BẠN

Điền vào ô trống cho thích hợp :

Đơn thức	$3x^4z$	0	2	$-\frac{1}{2}x^5yz^9$
Bậc				

◆ Tích hai đơn thức

Ví dụ :

Để nhân hai biểu thức $3x^3y^2z$ và $2x^5yz^7$ ta thực hiện như sau :

$$\begin{aligned}(3x^3y^2z).(2x^5yz^7) &= (3.2)(x^3y^2z)(x^5yz^7) \quad (\text{nhóm phần hệ số và phần biến}) \\ &= 6(x^3x^5)(y^2y)(zz^7) \quad (\text{nhóm những biến giống nhau}) \\ &= 6x^8y^3z^8 \quad (\text{thực hiện phép toán nhân}).\end{aligned}$$

Ta nói $6x^8y^3z^8$ là tích của hai đơn thức $3x^3y^2z$ và $2x^5yz^7$.

Hoạt động

4

- Nhân hai đơn thức $3x^5yz$ và $-2x^5yz^2$.
- Viết đơn thức $(-3x^4y)(xyz)(z^7y^3)(-2)$ thành đơn thức thu gọn.

Chú ý :

- Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.
- Mỗi đơn thức đều có thể viết thành một đơn thức thu gọn.

ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Hoạt động

5



Quan sát các hình minh họa ở trên, em hãy nhận xét vì sao tại các bãi đỗ xe, người ta thường hay sắp xếp các loại xe đạp, xe mô tô và xe ô tô đậu riêng ?



♦ Đơn thức đồng dạng

Hoạt động 6

Cho đơn thức $5x^4y^3z^2$. Hãy cho biết các đơn thức nào dưới đây có phân biến giống với đơn thức đã cho :

$$3x^4y^3z^2 ; -5x^3y^4z^2 ; 5x^4y^3z ; \frac{1}{2}x^4y^3z^2 ; x^4y^3z^2.$$

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phân biến.

Các số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

Ví dụ :

- $2x^3y^5 ; -x^3y^5 ; \frac{1}{2}2x^3y^5$ là những đơn thức đồng dạng.
- $-2 ; 3 ; 5$ là những đơn thức đồng dạng.

Hoạt động 7

- Tìm ba đơn thức đồng dạng với đơn thức xy^2 .
- Tìm ba đơn thức không đồng dạng với đơn thức $-2x^2y$.



THỬ TÀI BẠN

Sắp xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng :

$$-3x^2y^3 ; 0,5xy ; xy^2 ; x^2y^3 ; 3xy ; -3xy^2.$$



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Bạn Nam nói : Hai đơn thức cùng bậc thì đồng dạng.

Bạn Lan nói : Hai đơn thức đồng dạng thì cùng bậc.

Ý kiến của em thế nào ?

♦ Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng

Hoạt động 8

Điền vào ô trống các giá trị thích hợp :

a) $3x^5y + 2x^5y = (\square + \square)x^5y = \square x^5y$

b) $xy^3 - 2xy^3 = (\square + \square)xy^3 = \square xy^3$

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phân biến.

Ví dụ : Cộng và trừ hai đơn thức $-xy^2$ và $3xy^2$.

Giải

$$-xy^2 + 3xy^2 = (-1 + 3)xy^2 = 2xy^2.$$

Đơn thức $2xy^2$ được gọi là tổng của hai đơn thức $-xy^2$ và $3xy^2$.

$$-xy^2 - 3xy^2 = (-1 - 3)xy^2 = -4xy^2$$

Đơn thức $-4xy^2$ được gọi là hiệu của hai đơn thức $-xy^2$ và $3xy^2$.



THỬ TÀI BẠN

Tìm tổng của ba đơn thức $-x^3y^2$, $5x^3y^2$ và $2x^3y^2$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Bạn Thuý đố bạn Toàn và bạn Lan : “Hai đơn thức $-2x^2y^3$ và $-2x^3y^2$ có đồng dạng với nhau không?”.

Toàn trả lời : “Không đồng dạng vì biến x ở hai đơn thức có phần mũ không giống nhau”.

Bạn Lan trả lời : “Không đồng dạng vì biến y ở hai đơn thức có phần mũ không giống nhau”.

Theo em, bạn nào đúng ?

GHI NHỚ



1. **Đơn thức** là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.
2. **Đơn thức thu gọn** là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, trong đó mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.
3. **Bậc** của một đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến số có trong đơn thức đó.
4. Hai **đơn thức đồng dạng** là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

BÀI TẬP

Đơn thức

1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức :

- a) $x^3(x-1)$;
- b) $-\frac{2}{3}xyz^2$;
- c) 5;
- d) $2-x^2$;
- e) $4x^2yzx$.

2. Hãy sắp xếp và rút gọn hai đơn thức sau :

- a) $12zyx^3y^2xy$;
- b) $5yxzx^2y^3x$.

3. Sắp xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng :

$$3x^{21}y^3; 0,5x^2y; 100xy^2;$$

$$x^{21}y^3; 3x^2y; -3xy^2.$$

4. Hãy cho biết phần hệ số và phần biến của mỗi đơn thức sau :

- a) $-2x^4z^3$;
- b) $-\frac{2}{3}xy^3$;
- c) $0,25x^3y^6z^3$.

5. Hãy nhân các đơn thức ở hàng và cột tương ứng, rồi điền kết quả đã thu gọn vào các ô trống trong bảng sau :

	10	$-x^3y^4$	$0,5x^2y^3$	0
$-0,2x^3y$				
$\frac{1}{2}xy^2$				
$3yz^2$				

6. Hãy thu gọn các đơn thức sau và tìm bậc của chúng :

- a) $-2x^2y^3z^4x$;
- b) $3zx^5yx^3y^2$;
- c) $zxy \cdot 3 \cdot x^3y^4z^2$.

Đơn thức đồng dạng

7. Sắp xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng :

$$-3x^3y^5; -0,3x^2y; 7xy^2z;$$

$$2x^3y^5; 4x^2y; -3xy^2z.$$

8. Tính tổng và hiệu của hai đơn thức $-2x^3y^2$ và $5x^3y^2$.

9. Hãy viết ba đơn thức đồng dạng với mỗi đơn thức sau :

- a) $-1,3x^3y^4$;
- b) $2y^4z^2$;
- c) $-3m^2n$;
- d) 3.

10. Thu gọn các biểu thức sau :

- a) $-1,2xy + 3xy - \frac{1}{2}xy$;
- b) $a^2b^3c - 3a^2b^3c + 2a^2b^3c$;
- c) $uv - vu + uv + \frac{1}{2}uv$;
- d) $xyz + yxz - 2zyx$.

11. Tính tích các đơn thức sau :

- a) $-6x^3y^2$ và $3x^2yz$;
- b) $(2x^3)^3$ và $-x^2y^4z^5$;
- c) x^2y^2 ; $4xy^5z$ và $|-3|xyz$.

ĐA THỨC

Đa thức

Cộng, trừ đa thức

Đa thức một biến

Cộng, trừ đa thức một biến

Nghiệm của đa thức một biến



(nguồn : www.skydivetoronto.com)

Quãng đường của một vật rơi tự do là một đa thức theo biến thời gian.



ĐA THỨC

◆ Đa thức

Hoạt động 1

Xét tổng diện tích các mặt của hộp đựng quà có độ dài ba cạnh là x , y và z (cm).



Em hãy điền vào chỗ trống sau :

Tổng diện tích đó là :

Biểu thức vừa nêu là một đa thức.

Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng được gọi là một hạng tử của đa thức ấy.

Ví dụ : $2x^2y - 4xy^3 + \frac{1}{5}xy - 6x + 2$ là một đa thức với các hạng tử là :

$$2x^2y ; \quad -4xy^3 ; \quad \frac{1}{5}xy ; \quad -6x ; \quad 2$$

Để cho gọn, ta thường kí hiệu đa thức bằng các chữ in hoa A, B, M, N, P, Q, ...

Ví dụ : $P = 5x^3y - \frac{2}{3}x^2 + 7xy - 2x + 4$.

Nhận xét : a) Mỗi đơn thức là một đa thức.

b) Số 0 được gọi là đa thức không.



THỬ TÀI BẠN

Hãy nêu các hạng tử của $Q = 6xy^2 - 4x^2 + \frac{1}{2}xy - 7$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

An nói : " $2x^2y^3 + 5xy + \frac{1}{5x} - 6x + 2$ là một đa thức". Tú thì cho rằng đó không phải là đa thức. Bạn nào đúng ? Vì sao ?

◆ Thu gọn đa thức

Trong một đa thức, các đơn thức đồng dạng còn được gọi là các hạng tử đồng dạng.

Hoạt động 2

Xét đa thức $A = 3xy - 5x^2 + 7xy + 2x^2 + 4y$.

Em hãy điền vào chỗ trống :

Đơn thức $3xy$ đồng dạng với

Đơn thức $2x^2$ đồng dạng với

Hãy cộng các cặp hạng tử đồng dạng vừa nêu.

Sau cùng ta thu được $A = 10xy - 3x^2 + 4y$.

Lúc đó trong đa thức A không còn các hạng tử đồng dạng và ta gọi $A = 10xy - 3x^2 + 4y$ là đa thức thu gọn của A .



THỬ TÀI BẠN

Hãy thu gọn đa thức $M = -4x^2 + 4y^2 + 8 - \frac{2}{5}x^2 - 2y^2$.

◆ Bậc của đa thức

Hoạt động 3

Xét hình chữ nhật có độ dài cạnh là x , y và một hình hộp chữ nhật có độ dài ba cạnh là x , y , z . Hãy điền vào các ô trống sau :

Diện tích hình chữ nhật là $S = \dots\dots\dots$

Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = \dots\dots\dots$

Ta nói các độ dài cạnh x , y là các đa thức bậc nhất ; S là đa thức bậc hai và V là đa thức bậc ba.



Bảng học sinh có dạng hình chữ nhật với độ dài cạnh là x và y .



Ngôi nhà hình hộp chữ nhật với độ dài ba cạnh là x , y và z .

Đa thức $P = 4x^2y^2 + 6xy^2 - 3x^2y^2 - 4y^2 - 7$ có dạng thu gọn là

$$P = x^2y^2 + 6xy^2 - 4y^2 - 7.$$

Trong đó, hạng tử x^2y^2 có bậc là 4, hạng tử $6xy^2$ có bậc là 3, hạng tử $-4y^2$ có bậc là 2 và hạng tử -7 có bậc là 0.

Bậc cao nhất trong các bậc vừa nêu là 4.

Ta nói đa thức P có bậc là 4.

Bậc của một đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Chú ý: Số 0 là đa thức không có bậc.



THỬ TÀI BẠN

Hãy viết một đa thức hai biến có bậc là 2 với 6 hạng tử.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

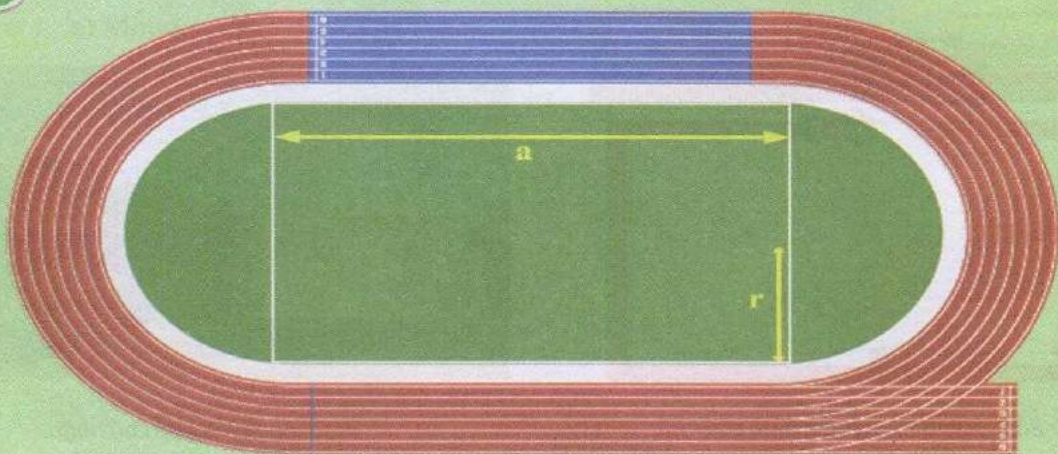
Cho đa thức $M = 6x^4y^5 - 4xy^3 + 2x^4y^4 - 6x^4y^5 - 1$. Bạn Bình nói đa thức M có bậc là 9. Bạn An thì cho rằng 8 mới là bậc của đa thức M . Bạn nào đúng? Vì sao?



CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

◆ Cộng hai đa thức

Hoạt động 4



Phần thảm cỏ bên trong sân vận động có các kích thước như hình vẽ (hai đầu là hai nửa hình tròn và ở giữa là một hình chữ nhật).

Hãy điền vào chỗ trống :

Chu vi của đường biên sân cỏ là :

(Đây là đa thức bậc nhất theo hai biến a và r)

Diện tích của thảm cỏ là :

(Đây là đa thức bậc hai theo hai biến a và r)

Để cộng hai đa thức $P = 4xy - 2x^2 + 3x + 1$ và $Q = 6x^2 - 7xy + y + 2$ ta làm như sau :

$$P + Q = (4xy - 2x^2 + 3x + 1) + (6x^2 - 7xy + y + 2)$$

$$= 4xy - 2x^2 + 3x + 1 + 6x^2 - 7xy + y + 2$$

(Bỏ dấu ngoặc)

$$= (4xy - 7xy) + (-2x^2 + 6x^2) + 3x + y + (1 + 2)$$

(Nhóm các cặp hạng tử đồng dạng)

$$= -3xy + 4x^2 + 3x + y + 3.$$

(Thực hiện phép cộng hoặc trừ các hạng tử đồng dạng)

Ta nói đa thức $-3xy + 4x^2 + 3x + y + 3$ là *tổng* của hai đa thức P và Q.



THỬ TÀI BẠN

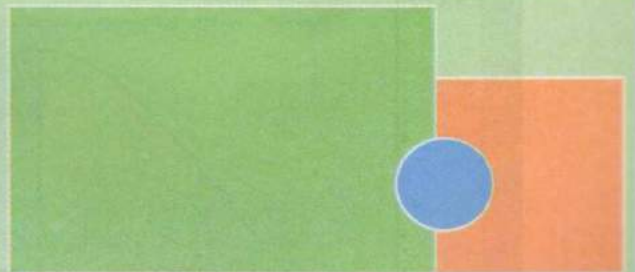
Hãy thực hiện phép cộng hai đa thức sau :

$$M = 5x - 2y^2 + 3xy + 2 \quad \text{và} \quad N = 8y^2 - 3xy + 9x - 10.$$

♦ Trừ hai đa thức

Hoạt động 5

Một mảnh vườn bao gồm một hình chữ nhật có độ dài cạnh là a, b và một hình vuông có độ dài cạnh là 4x. Bên trong mảnh vườn người ta đào một cái giếng hình tròn có bán kính là x như hình bên.



Hãy điền vào chỗ trống :

Diện tích phần vườn hình chữ nhật : $S_1 = \dots\dots\dots$

Diện tích phần vườn hình vuông : $S_2 = \dots\dots\dots$

Diện tích miệng giếng : $S_3 = \dots\dots\dots$

Diện tích của mảnh vườn : $S_1 + S_2 = \dots\dots\dots$

Diện tích phần mảnh vườn còn lại sau khi đào giếng :

$$S_1 + S_2 - S_3 = \dots\dots\dots$$

Để trừ hai đa thức $P = 2x^2y - 4y^2 + 3xy + 7$ và $Q = 9x^2y - 3xy + 6y - 4$ ta làm như sau :

$$P - Q = (2x^2y - 4y^2 + 3xy + 7) - (9x^2y - 3xy + 6y - 4)$$

$$= 2x^2y - 4y^2 + 3xy + 7 - 9x^2y + 3xy - 6y + 4$$

(Bỏ dấu ngoặc)

$$= (2x^2y - 9x^2y) - 4y^2 + (3xy + 3xy) - 6y + (7 + 4)$$

(Nhóm các cặp hạng tử đồng dạng)

$$= -7x^2y - 4y^2 + 6xy - 6y + 11$$

(Thực hiện phép cộng hoặc trừ các hạng tử đồng dạng)

Ta nói đa thức $-7x^2y - 4y^2 + 6xy - 6y + 11$ là *hiệu* của hai đa thức P và Q.



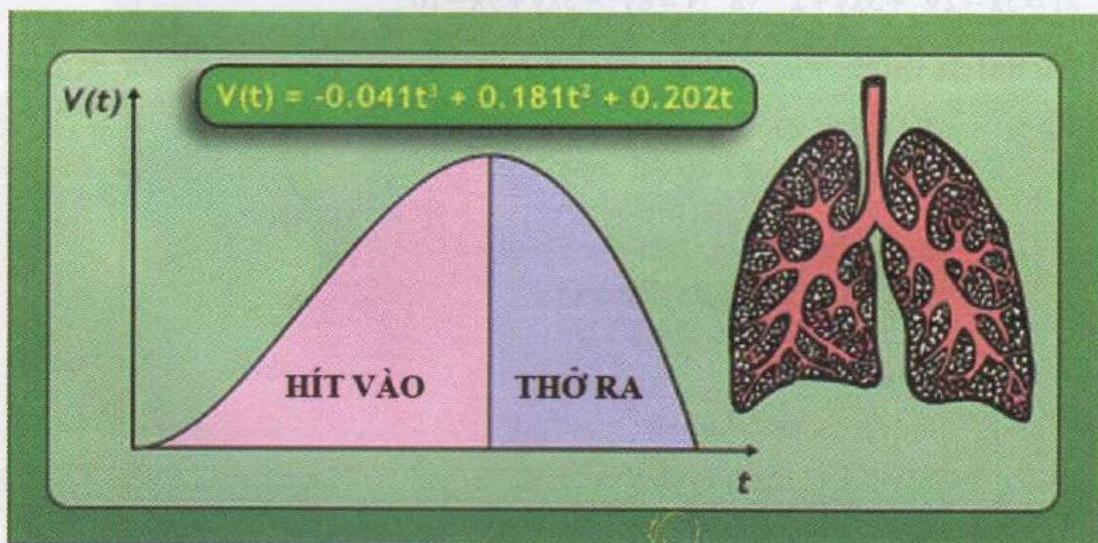
THỬ TÀI BẠN

Hãy thực hiện phép trừ hai đa thức sau :

$$A = -5y + 4xy^2 - 6xy + 2 \quad \text{và} \quad Q = 6xy^2 - 2xy + 2x - 5.$$



ĐA THỨC MỘT BIẾN



Thể tích V của phổi (thể tích khí hít vào hoặc thở ra) là một đa thức theo biến thời gian t.

◆ Đa thức một biến

Hoạt động 6

Một người đi taxi phải trả 15 000 đồng cho 1 km trong 10 km đầu tiên. Khi hành trình vượt quá 10 km thì sẽ trả 14 000 đồng cho mỗi km tiếp theo. Hãy viết biểu thức biểu diễn số tiền người đó phải trả khi đi x km (với $x > 10$ km và x là số nguyên).



Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Ví dụ :

$P = 3x^3 - 6x^2 + \frac{2}{3}x - 5$ là đa thức của biến x .

$Q = 14y^2 - \frac{2}{7}y + 10$ là đa thức của biến y .

$M = 8t^4 - t^2$ là đa thức của biến t .

Các ví dụ trên còn được viết là $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + \frac{2}{3}x - 5$, $Q(y) = 14y^2 - \frac{2}{7}y + 10$,

$M(t) = 8t^4 - t^2$. Khi đó giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = 1$ được kí hiệu là $P(1)$; giá trị của $Q(y)$ tại $y = -3$ được kí hiệu là $Q(-3)$, ...

Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

Ví dụ :

$P = 5x^3 - 8x^2 + \frac{4}{5}x + 2$ có bậc là 3.

Mỗi số thực là một đa thức một biến.



THỬ TÀI BẠN

a) Cho $P = 5x^2 - 2x + 3$. Hãy tính $P(2)$, $P(0)$ và $P(-1)$.

b) Tìm bậc của đa thức $M = -4t^4 - 5t^2 + 2$.

◆ Sắp xếp một đa thức

Để thuận tiện cho việc tính toán, người ta sắp xếp các hạng tử của đa thức một biến theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

Ví dụ :

Cho đa thức $P = 7x^2 - 12x^4 + 5x - 2x^3 + 2$.

Khi xếp theo lũy thừa tăng của biến, ta có :

$$P = 2 + 5x + 7x^2 - 2x^3 - 12x^4.$$

Khi xếp theo lũy thừa giảm của biến, ta có :

$$P = -12x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5x + 2.$$

Để sắp xếp một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.





THỬ TÀI BẠN

a) Hãy sắp xếp $A = 6x^2 - 12x^3 + 4x - 5x^2 + x^3 - 1$ theo lũy thừa giảm của biến.

b) Hãy sắp xếp $B = 3x + 11x^2 - 10x + 2x^4 - 2x^2$ theo lũy thừa tăng của biến.

Nhận xét :

- Mọi đa thức bậc nhất của biến x đều có dạng (viết theo lũy thừa giảm của biến) :

$$ax + b$$

trong đó a, b là các số cho trước (với $a \neq 0$).

- Mọi đa thức bậc hai của biến x đều có dạng (viết theo lũy thừa giảm của biến) :

$$ax^2 + bx + c$$

trong đó a, b, c là các số cho trước (với $a \neq 0$).

- Đa thức ax có một hạng tử.

Đa thức $ax + b$ có hai hạng tử.

Đa thức $ax^2 + bx + c$ có ba hạng tử.



◆ Hệ số

Cho đa thức $M = 6x^4 - 3x^3 + 7x - 5$ có dạng sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến x . Ta nói 6 là hệ số của lũy thừa bậc 4 ; -3 là hệ số của lũy thừa bậc 3 ; 0 là hệ số của lũy thừa bậc 2 ; 7 là hệ số của lũy thừa bậc 1 và -5 là hệ số của lũy thừa bậc 0 (còn được gọi là hệ số tự do). Hệ số 6 của lũy thừa có bậc cao nhất được gọi là hệ số cao nhất.



THỬ TÀI BẠN

Tìm hệ số của lũy thừa bậc 2 và hệ số tự do của đa thức

$$Q = -3x + 4x^4 + 7x^3 - 2x + 6x^4.$$



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho đa thức $P(x) = -x^3 + 4x^2 + 2$.

Minh nói $P(x)$ có hệ số cao nhất là 4.

Bình thì cho rằng $P(x)$ có hệ số cao nhất là -1. Bạn nào đúng ? Vì sao ?

CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

◆ Cộng hai đa thức một biến

Hoạt động 7

Cho một hình vuông có độ dài cạnh là x (cm) và một hình chữ nhật có độ dài các cạnh là x (cm) và $x + 2$ (cm).

Hãy điền vào chỗ trống cho thích hợp :

Diện tích của hình vuông là $M(x) = \dots\dots\dots$

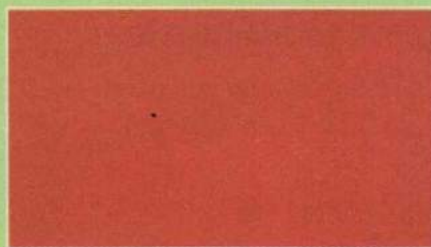
Diện tích của hình chữ nhật là $N(x) = \dots\dots\dots$

Tổng diện tích của hai hình là $M(x) + N(x) = \dots\dots\dots$

x (cm)



$x + 2$ (cm)



Ví dụ :

Tính tổng của hai đa thức sau :

$$P(x) = -4x^4 + 9x^2 + \frac{1}{2} \quad Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2}$$

Cách 1 : Thực hiện như cộng hai đa thức :

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (-4x^4 + 9x^2 + \frac{1}{2}) + (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2}) \\ &= -4x^4 + 9x^2 + \frac{1}{2} + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2} \\ &= (-4x^4 + 3x^4) - 7x^3 + (9x^2 + 2x^2) - 5x + (\frac{1}{2} + \frac{7}{2}) \\ &= -x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x + 4. \end{aligned}$$

Cách 2 : Sắp xếp các hạng tử đồng dạng của $P(x)$ và $Q(x)$ ở cùng một cột rồi thực hiện phép cộng như sau :

$$\begin{array}{r} P(x) = -4x^4 \quad + 9x^2 \quad + \frac{1}{2} \\ + \\ Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2} \\ \hline P(x) + Q(x) = -x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x + 4 \end{array}$$



THỬ TÀI BẠN

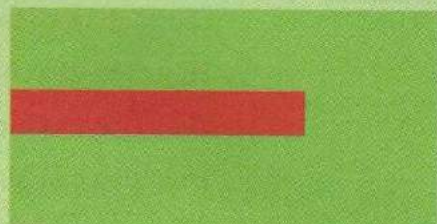
Cho hai đa thức $A(x) = 3x^2 - 4x + 2$ và $B(x) = 6 - 2x^2 + 5x$.

Hãy thực hiện phép tính $A(x) + B(x)$.

♦ Trừ hai đa thức một biến

Hoạt động 8

Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài các cạnh là $5x$ (cm) và $8x + 2$ (cm). Bên trong mảnh vườn, người ta làm một lối đi hình chữ nhật với độ dài cạnh là x (cm) và $3x + 1$ (cm) (xem hình vẽ).



Hãy điền vào chỗ trống cho thích hợp :

Diện tích của mảnh vườn là $A(x) = \dots\dots\dots$

Diện tích của lối đi là $B(x) = \dots\dots\dots$

Diện tích còn lại của mảnh vườn là $A(x) - B(x) = \dots\dots\dots$

Ví dụ : Tính $P(x) - Q(x)$ với

$$P(x) = -4x^4 + 9x^2 + \frac{1}{2} \quad Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2}$$

Cách 1 : Thực hiện như trừ hai đa thức :

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (-4x^4 + 9x^2 + \frac{1}{2}) - (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2}) \\ &= -4x^4 + 9x^2 + \frac{1}{2} - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 5x - \frac{7}{2} \\ &= (-4x^4 - 3x^4) + 7x^3 + (9x^2 - 2x^2) + 5x + (\frac{1}{2} - \frac{7}{2}) \\ &= -7x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 5x - 3. \end{aligned}$$

Cách 2 : Sắp xếp các hạng tử đồng dạng của $P(x)$ và $Q(x)$ ở cùng một cột rồi thực hiện phép trừ như sau :

$$\begin{array}{r} P(x) = -4x^4 \quad + 9x^2 \quad + \frac{1}{2} \\ - \quad Q(x) = \quad 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + \frac{7}{2} \\ \hline P(x) - Q(x) = -7x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 5x - 3 \end{array}$$



THỬ TÀI BẠN

Tính $M - N$ biết :

$$M = 12x^4 - 7x^3 - 8x + 6$$

$$N = 5x^3 - 16x^2 - 13.$$



NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

◆ Nghiệm của đa thức

Hoạt động

9

Cho hai hình chữ nhật có các kích thước như hình vẽ.

$x - 2$



$x + 1$

+



$x + 2$

$x - 2$

Hãy điền vào chỗ trống :

Tổng diện tích của hai hình chữ nhật là :

$$S(x) = \dots\dots\dots$$

Xét đa thức $P(x) = S(x) - 9$.

Ta có $P(3) = \dots\dots\dots$

Em có nhận xét gì về giá trị của $P(x)$ khi $x = 3$?

Nếu tại $x = a$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói $x = a$ là nghiệm của đa thức đó.

◆ Ví dụ

a) Đa thức $P(x) = 3x - 1$ có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ vì $P\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$.

b) Đa thức $Q(x) = x^2 - 4x + 3$ có các nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$ vì $Q(1) = Q(3) = 0$.

c) Đa thức $R(x) = x^2 + 2$ không có nghiệm vì ta luôn có $R(x) = x^2 + 2 \geq 2 > 0$ với mọi giá trị của x .

Chú ý :

– Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm (vô nghiệm).

– Người ta chứng minh được rằng một đa thức (khác đa thức không) có số nghiệm không vượt quá bậc của đa thức đó.

Như vậy, có thể hiểu rằng, đa thức bậc nhất chỉ có một nghiệm ; đa thức bậc hai có không quá hai nghiệm, ...



THỬ TÀI BẠN

Có phải $x = \pm 2$ là các nghiệm của đa thức $A(x) = x^2 + 4$ hay không ? Vì sao ?



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Bạn An nói rằng “ $x = 2$ và $x = -2$ là hai nghiệm của đa thức $B(x) = x^2 - 4$ và chỉ có đa thức $B(x)$ vừa nêu nhận hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -2$ ”.

Bạn Bình nói ý kiến của An là sai.

Theo em, bạn nào đúng ? Vì sao ?

BÀI TẬP

Đa thức

1. Tìm bậc của mỗi đa thức sau :

a) $M = 3x^3 - 4xy^2 + 12x^2y - 1$.

b) $N = 7x^2y^2 - 4x^3y + 9y^4 + 7x^2y + 13$.

2. Cho đa thức

$$A = \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^2 + 3x^2y^2 + 7y^2x - 14.$$

a) Hãy thu gọn đa thức A.

b) Tìm bậc của A.

3. Cho đa thức $B = 5x^2 - 4x + 2x^2 - 3x + 1$.

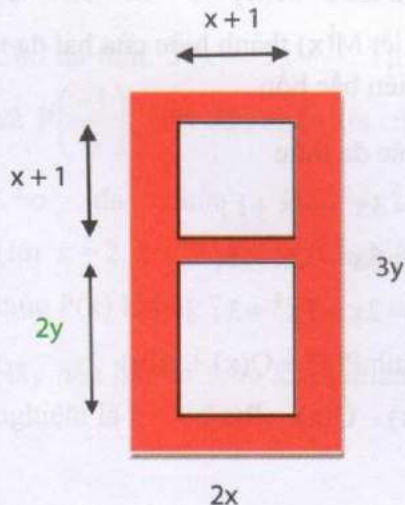
Hãy thu gọn rồi tính giá trị của đa thức B tại $x = -3$.

4. Cho đa thức

$$P = -7xy^2 + 5xy + 3xy^2 - xy + 8.$$

Hãy thu gọn rồi tính giá trị của đa thức P tại $x = 2$ và $y = -1$.

5. Một cánh cửa sổ bằng gỗ với kích thước là $2x$ và $3y$. Bên trong cánh cửa, người ta gắn hai tấm kính. Tấm kính thứ nhất có kích thước là $(x + 1)$ và $(x + 1)$ và tấm kính thứ hai có kích thước là $(x + 1)$ và $(2y)$ (xem hình vẽ).



Hãy viết biểu thức đại số biểu thị diện tích phần gỗ của cánh cửa.

Biểu thức ấy có phải là một đa thức không ?

6. Biểu thức $2x^2y - 2x\sqrt{y} + xy - 10$

có được gọi là đa thức không ?

7. Biểu thức $5xy^3 - 4y \cdot \frac{1}{x+2} - x^2y + 2$

có được gọi là đa thức không ?

Cộng, trừ đa thức

8. Cho $M = 5x^2 - 8x^2y - 2y + 3$ và

$N = 3y + 5x^2y + 13$. Tính tổng của M và N.

9. Cho $A = -2xyz + 4x^2 - 8y + 3$ và

$B = 2xyz - 9y + 7x + 11$.

Tính $A + B$ và $A - B$.

10. Tìm đa thức P, biết rằng :

$$x^2 - y^2 + 4xy + P = \frac{1}{3}x^2 - 6xy - 3y^2 + 2x + 3.$$

11. Tìm đa thức Q, biết rằng :

$$\begin{aligned} Q - (2x^4 - 3x^2y^2 + 5x^2y - 4x + 2) \\ = 2x^2y^2 + 5x - 7y - x^2y. \end{aligned}$$

12. Tính tổng của hai đa thức sau :

$$M = 2x^2 - 3xy^2 + 3x^2y - 3y + 2$$

$$N = 4x^2y^2 - 2xy^2 + 3x^2y - 4x + 2y.$$

13. Cho đa thức :

$$P = 3xy^3 - 4x^2y^2 + 2x^2y - 2xy + 9.$$

Tính giá trị của P tại $x = -2$ và $y = 3$.

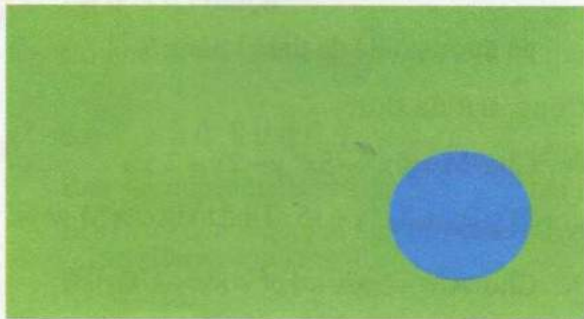
14. Viết một đa thức bậc bốn với hai biến số x, y và có năm hạng tử.

15. Cho $P = 6x^2y - 4xy + 9x^2 - 7y + 1$

và $Q = -3xy - 8y^2x - 5y + x - 11$.

- a) Tìm đa thức R, biết rằng $R - Q = P$.
 b) Tìm đa thức M, biết rằng $P + M = Q$.

16. Trong mảnh đất hình chữ nhật có độ dài các cạnh là x (cm) và y (cm), người ta đào một cái giếng hình tròn có bán kính là r (cm). Tính diện tích S còn lại của mảnh đất theo x, y và r. Diện tích S có phải là một đa thức không?



Đa thức một biến

17. Cho đa thức

$$P(x) = 5x - 7x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 4x^3 + 6x^4 - 9x + 6.$$

- a) Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử của P(x) theo lũy thừa giảm dần của biến.
 b) Nêu các hệ số của P(x).
18. Cho đa thức

$$Q(x) = -5x^5 + 4x^3 - 8x^2 - 12x^3 - 9x^2 + 7.$$

- a) Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử của Q(x) theo lũy thừa tăng dần của biến.
 b) Nêu các hệ số của Q(x).
19. Hãy viết một đa thức một biến có ba hạng tử với hệ số cao nhất là -8 và hệ số tự do là 5.
20. Cho đa thức $M(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Tính giá trị của đa thức tại $x = 2$ và tại $x = -1$.

21. Cho đa thức $P(x) = 6x - 1$ thì P(x) có bậc là:
 a) 6; b) 1; c) -1.

22. Cho đa thức $Q(x) = 5x - 4 + 3x^2$ thì Q(x) có bậc là:

a) 5; b) 3; c) 2.

23. Cho đa thức $M(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x + 11$ thì M(x) có hệ số cao nhất là:

a) 11; b) 3; c) 8.

Cộng, trừ đa thức một biến

24. Cho hai đa thức

$$M(x) = x^2 + 7x^4 - 2x - 10$$

$$\text{và } N(x) = 3x + 4x^4 - 2x^3 + 7.$$

Hãy tính $M(x) + N(x)$ và $M(x) - N(x)$.

25. Cho đa thức $P(x) = -4x^2 + 5x^3 - 3x - 2$.

Tìm đa thức Q(x) sao cho

$$Q(x) - P(x) = 2x + x^2 - 3x^4 - 4.$$

26. Cho đa thức

$$M(x) = -2x^4 + 4x^2 - 5x + \frac{3}{10}.$$

Tìm đa thức N(x) sao cho

$$M(x) + N(x) = 7 - 12x + x^2 - x^4.$$

27. Cho đa thức $P(x) = 4x + \frac{2}{5}x^2 - 3x^3 + 1$.

Hãy viết P(x) thành tổng của hai đa thức một biến bậc bốn.

28. Cho đa thức $M(x) = 6 + 4x - 9x^2 + 5x^3$.

Hãy viết M(x) thành hiệu của hai đa thức một biến bậc bốn.

29. Cho các đa thức

$$P(x) = 3x^2 - 4x + 1;$$

$$Q(x) = 5x^3 - 2x - 4;$$

$$R(x) = 2x - 7x^4 + 3.$$

Hãy tính $P(x) + Q(x) + R(x)$

và $P(x) - Q(x) - R(x)$.

30. Cho các đa thức

$$M(x) = 4x - 9x^4 + 2x^2;$$

$$N(x) = 5 + 2x^2 - 8x + x^4.$$

a) Hãy sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức theo lũy thừa tăng của biến.

b) Hãy tính $M(x) + N(x)$ và $M(x) - N(x)$.

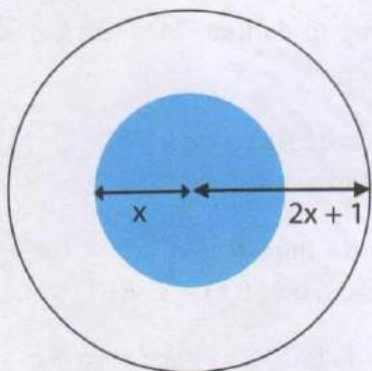
31. Cho các đa thức

$$P(x) = 3 - 2x^4 - 5x^3 + 8x^2;$$

$$Q(x) = 3x^2 - 4x + 7x^4 + 1.$$

Hãy tính $Q(x) - P(x)$; $P(x) - Q(x)$ và đưa ra nhận xét về các hệ số của hai đa thức vừa tìm.

32. Cho hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là x (cm) và $2x + 1$ (cm). Tính diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn nói trên.



Nghiệm của đa thức

33. Cho đa thức $P(x) = 2x + \frac{1}{3}$. Tính $P\left(\frac{1}{6}\right)$ và $P\left(\frac{-1}{6}\right)$. Hãy nêu nhận xét của em.

34. Cho đa thức $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Hỏi $x = 2$, $x = 3$ có phải là nghiệm của đa thức $P(x)$ không?

35. Hãy nêu hai đa thức khác nhau cùng có nghiệm là $x = -2$.

36. Hãy chứng tỏ đa thức $P(x) = 2x^4 + x^2 + 1$ không có nghiệm.

37. Đa thức $Q(x) = x^4 + 4x^2$ có nghiệm là :

a) $x = 2$; b) $x = -2$; c) $x = 0$.

38. Tìm nghiệm của đa thức $P(x) = 2x + 4$.

39. Tìm nghiệm của đa thức $Q(y) = y^2 - 9$.

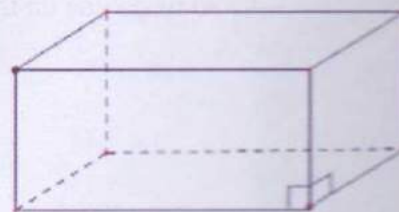
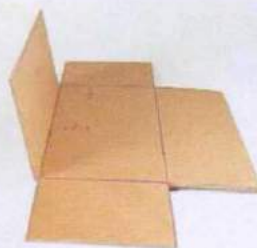
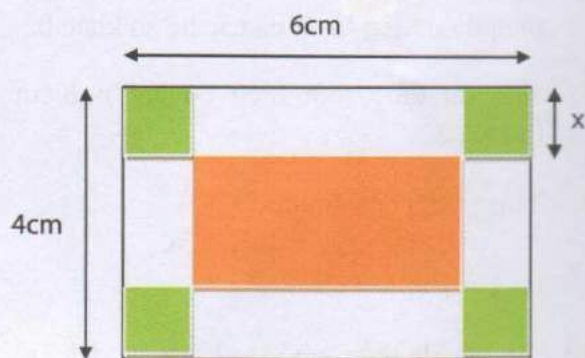
40. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có độ dài các cạnh là 4 cm và 6 cm, người ta cắt bỏ bốn hình vuông có độ dài cạnh là x (cm) nằm ở bốn góc của tấm bìa (xem hình vẽ) rồi xếp thành một hình hộp chữ nhật không có nắp.

a) Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật nói trên theo biến x .

b) Tính giá trị của V tại $x = 1$.

c) Hãy tìm một giá trị của x thoả

$$V(x) - 8 = 0.$$



ÔN TẬP CHƯƠNG 4

1. Hãy viết biểu thức đại số biểu thị hiệu bình phương của x và y .
2. Tìm độ dài quãng đường s theo công thức $s = v.t$ biết $v = 30$ km/h và $t = 2\text{h}30'$.
3. Hãy viết một đơn thức hai biến x, y và có hệ số là -3 .
4. Thế nào là hai đơn thức đồng dạng. Cho hai đơn thức $A = 3$ và $B = 7$. Hỏi A và B có phải là hai đơn thức đồng dạng không?
5. Hãy viết một đa thức bậc 5 có ba hạng tử, hệ số tự do bằng 0.
6. Tìm hai đa thức bậc 4 sao cho tổng của chúng là một đa thức bậc 3, đa thức tổng có hệ số tự do bằng -1 và hệ số của bậc cao nhất bằng 1.
7. Hãy viết một đa thức một biến, bậc 3 thỏa mãn điều kiện là tất cả các hệ số khác 0.
8. Viết đa thức một biến có hai nghiệm là 1 và 2.
9. Tìm giá trị của đa thức $P = 2xy + 4x^2y - 3x$ tại $x = 1$ và $y = 2$.
10. Sắp xếp đa thức $A(x) = -1 + x^3 - x^2 + 3x^5$ theo lũy thừa giảm dần của biến và chỉ ra hệ số tự do của đa thức này.
11. Cho đa thức $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$. Số nào trong ba số $-1; 1; 2$ là nghiệm của $P(x)$?
12. Tìm nghiệm của đa thức $P(x) = 4x - 1$.
13. Tìm nghiệm của đa thức $Q(y) = 16 - y^2$.
14. Cho đa thức $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$. Hãy tìm đa thức $Q(x)$ sao cho $P(x) + Q(x) = 3x^2 - 7x + 4$.
15. Hãy điền đơn thức thích hợp vào ô trống :
 - a)

$3xy$	$.$	$2x^2$	$=$	$6x^3y$
-------	-----	--------	-----	---------
 - b)

$4x^3y$	$.$	$-2xyz$	$=$	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 20px;"></div>
---------	-----	---------	-----	---
16. Chứng tỏ đa thức $M = 4x^2 + 1$ không có nghiệm.
17. Tìm m để $f(x) = (m - 1)x^2 - 3x + 2$ có một nghiệm $x = 1$.
18. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 - bx + a$. Tìm a, b biết $f(1) = 2, f(-1) = 4$.
19. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 - a) Tính $f(0), f(1), f(-1)$.
 - b) Chứng tỏ rằng :
Nếu $f(2) = 5$ thì $4a + 2b + c - 5 = 0$.



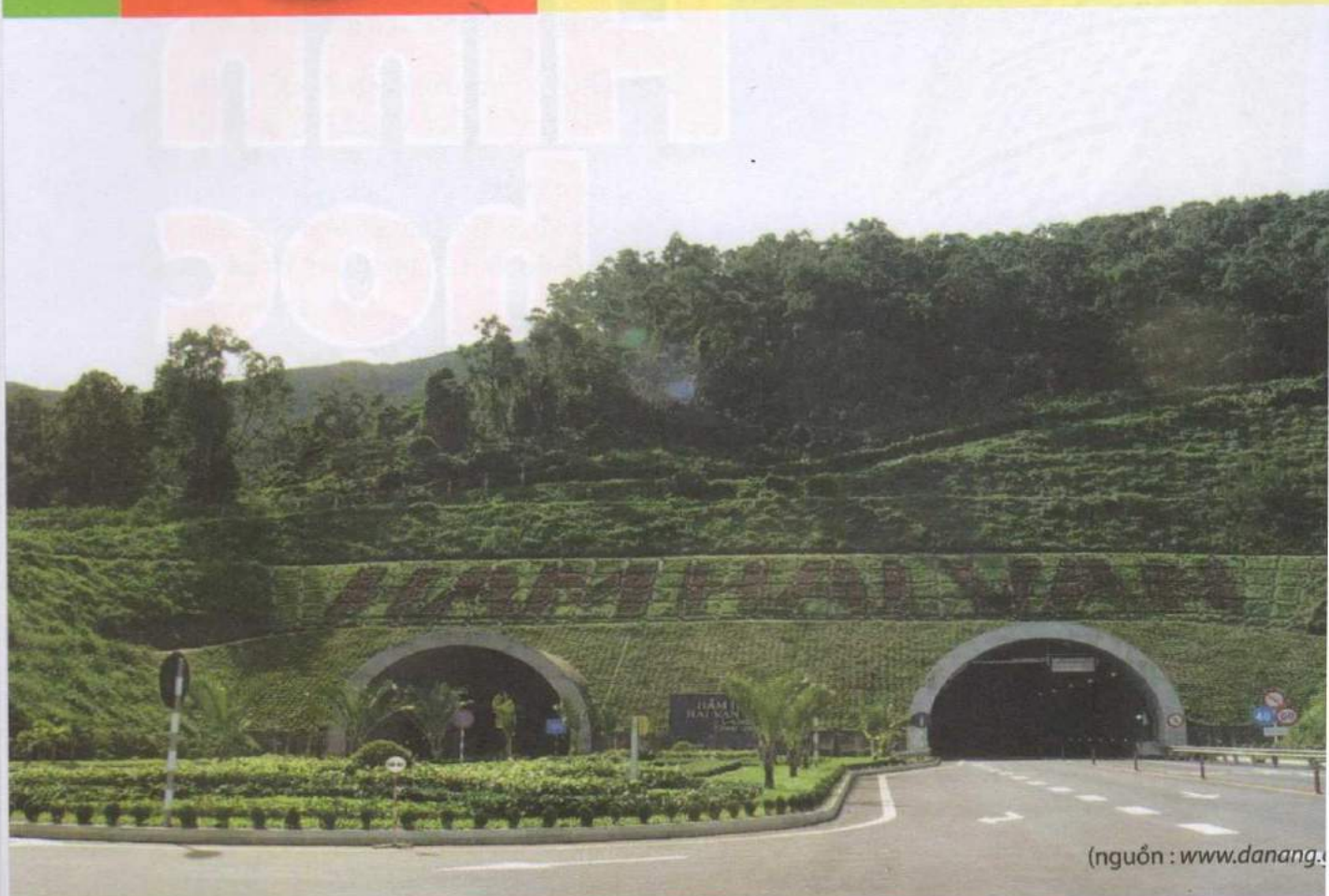
PHẦN

Hình học

CHƯƠNG

3

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC – CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC



(nguồn : www.danang.gov.vn)

Hầm Hải Vân (dài 6280 m) là hầm đường bộ dài nhất ở Nam Á, xuyên qua đèo Hải Vân (dài 21 000 m), giúp ngắn đáng kể khoảng cách nối liền tỉnh Thừa Thiên - Huế với thành phố Đà Nẵng, miền Trung Việt Nam.

CHỦ ĐỀ

5

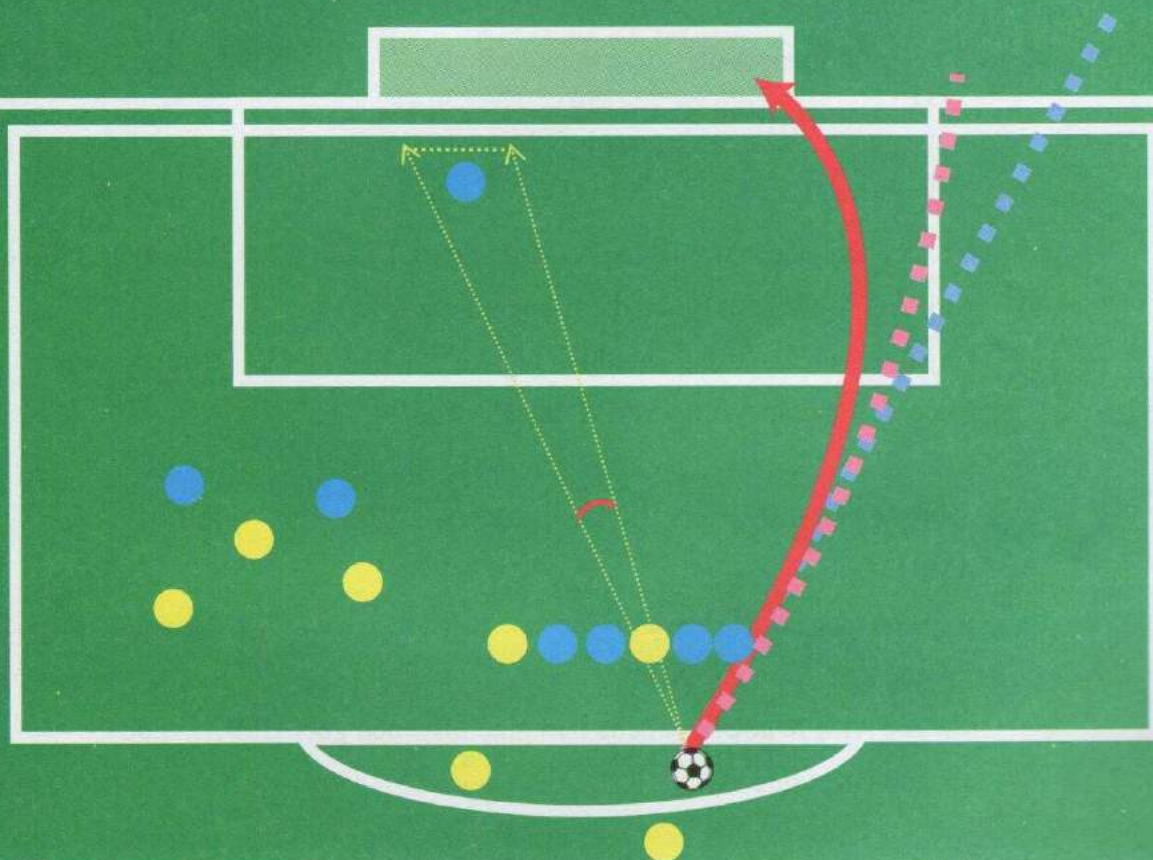
QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác

Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác.

Bất đẳng thức tam giác



Trong một trận thi đấu bóng đá, các cầu thủ bên bị thổi phạt thường lập hàng rào để khép kín góc sút thẳng của cầu thủ đội bạn (góc màu vàng). Khi đó, thủ môn chỉ cần di chuyển một đoạn ngắn hơn chiều ngang khung thành để xử lý đường bóng sút thẳng của cầu thủ đội bạn. Vì vậy, trong bóng đá hiện đại, các cầu thủ sút phạt thường lựa chọn cách đá vòng cầu vượt qua hàng rào (đánh dấu đỏ).



QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH TRONG MỘT TAM GIÁC

♦ Góc đối diện với cạnh lớn hơn

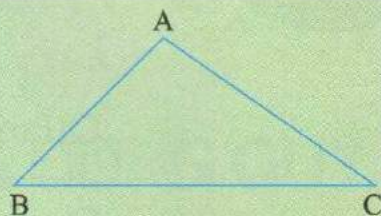
Hoạt động 1

Quan sát tam giác ABC ở hình bên và điền vào chỗ trống :

Góc đối diện với cạnh AB là :

Góc đối diện với cạnh AC là :

Góc đối diện với cạnh BC là :



Hình 1

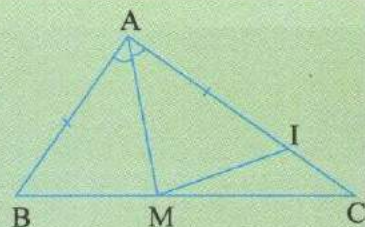
Hoạt động 2

Hãy dùng thước thẳng và thước đo góc để đo độ dài các cạnh và số đo các góc của tam giác ABC ở hình 1. Sau đó sắp xếp thứ tự từ bé đến lớn độ dài của ba cạnh và số đo của ba góc. Rút ra kết luận gì ?

Hoạt động 3

Cho tam giác ABC (hình 2) với giả thiết và kết luận như sau :

GT	Tam giác ABC $AC > AB$
KL	$\widehat{B} > \widehat{C}$



Hình 2

Vẽ tia phân giác AM của góc A (M thuộc BC). Trên tia AC, lấy điểm I sao cho $AI = AB$. Vì $AC > AB$ nên điểm I nằm giữa A và C.

Hãy điền vào chỗ trống cho thích hợp :

Xét các tam giác ABM và AIM, ta có :

$AB = \dots$ (.....)

$\dots = \widehat{MAI}$ (.....)

AM là

Vậy tam giác = tam giác (.....)

\Rightarrow góc = góc AIM.

Mà góc AIM là góc ngoài của tam giác MIC nên góc AIM góc C.

\Rightarrow góc B góc C.

Định lí 1

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.



THỬ TÀI BẠN

- Hãy sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn số đo của ba góc A, B và C trong tam giác ABC với $AB < AC < BC$.
- Cho tam giác ABC có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Em hãy cho biết góc nào của tam giác ABC có số đo lớn nhất.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Bạn Phương Linh cho rằng :

“Khi biết độ dài ba cạnh của tam giác, ta có thể biết ngay góc nào lớn nhất, góc nào nhỏ nhất mà không cần vẽ hình”.

Bạn Long cho rằng :

“Khi biết độ dài ba cạnh của một tam giác, ta phải vẽ hình, xác định góc đối diện với cạnh tương ứng rồi mới có thể biết được góc nào lớn nhất, góc nào nhỏ nhất”.

Ý kiến của em thế nào ?

◆ Cạnh đối diện với góc lớn hơn

Hoạt động 4

Thang xếp là một loại thang được ghép từ hai thang đơn. Em hãy quan sát thang xếp ở hình 3 và cho biết khoảng cách giữa hai chân thang sẽ thay đổi thế nào khi ta thay đổi số đo của góc ở đỉnh thang.



Hình 3

Hoạt động 5

Quan sát hình 4 và cho biết khoảng cách từ đỉnh cần cẩu đến mặt đất sẽ thay đổi như thế nào nếu góc mở của cần cẩu càng lớn.



Hình 4

Hoạt động 6

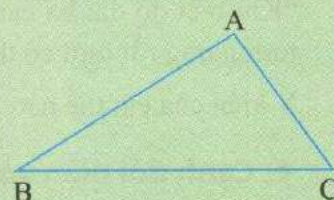
Quan sát hình 5 và cho biết khoảng cách giữa hai đầu compa sẽ như thế nào nếu góc hợp bởi hai cạnh của compa thay đổi.



Hình 5

Hoạt động 7

Hãy ước lượng rồi sắp xếp ba góc A, B, C ở hình 6 theo thứ tự tăng dần về độ lớn. Sau đó, cũng ước lượng để sắp xếp ba cạnh AB, AC và BC theo thứ tự tăng dần về độ dài. Từ đó, đưa ra kết luận về mối quan hệ giữa độ dài ba cạnh với số đo ba góc trong cùng một tam giác rồi viết dưới dạng giả thiết, kết luận.



Hình 6

Kiểm nghiệm lại kết luận trên bằng cách dùng thước thẳng và thước đo góc để đo độ dài ba cạnh và số đo ba góc của tam giác ABC trong hình 6.

Định lí 2

Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Ví dụ : Trong tam giác ABC ở hình 6, vì góc C lớn hơn góc B nên cạnh $AB > AC$.



THỬ TÀI BẠN

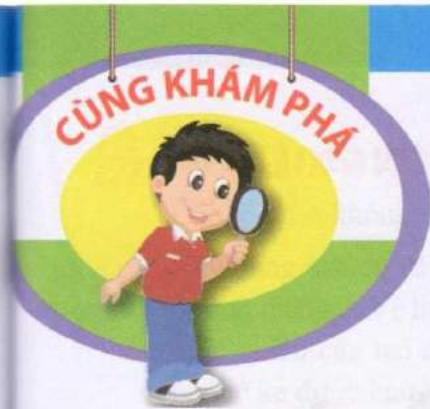
1. Cho tam giác DEF có góc F là góc tù. Theo em, cạnh nào là cạnh có độ dài lớn nhất trong ba cạnh ?
2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Theo em, cạnh nào là cạnh có độ dài lớn nhất trong ba cạnh ?

Nhận xét :

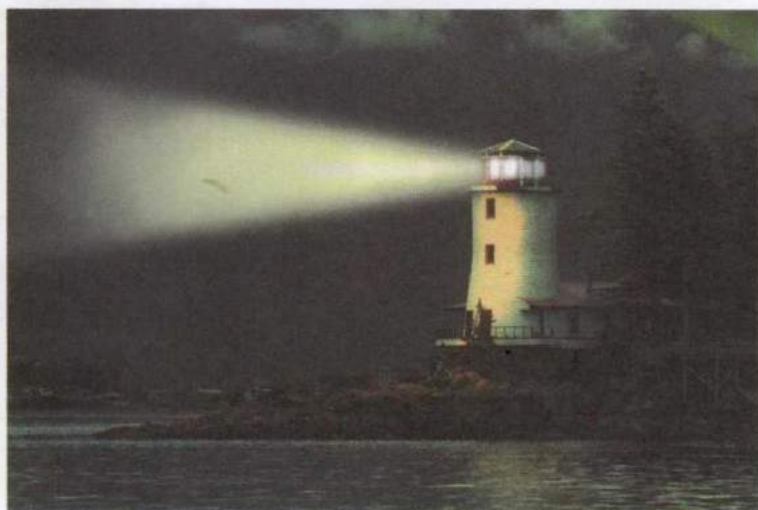
a) Định lí 2 là định lí đảo của định lí 1. Từ đó, trong tam giác ABC, ta có :

$$AB > AC \Leftrightarrow \text{góc } C > \text{góc } B.$$

b) Trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông), góc tù (hoặc góc vuông) là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

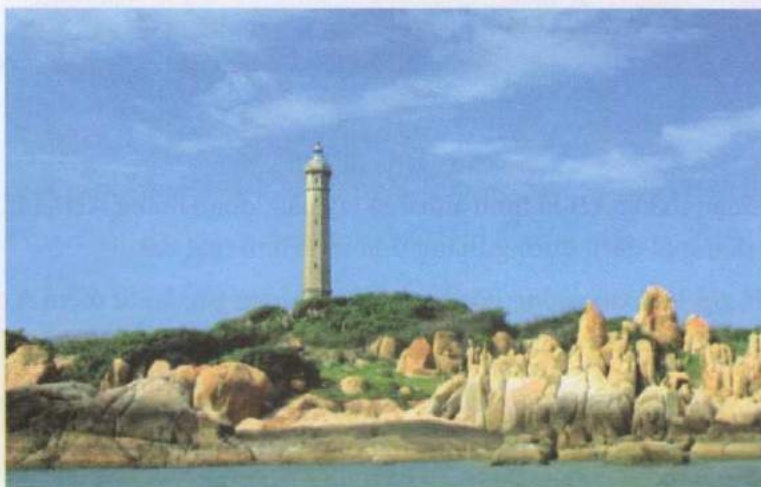


◆ Hải đăng

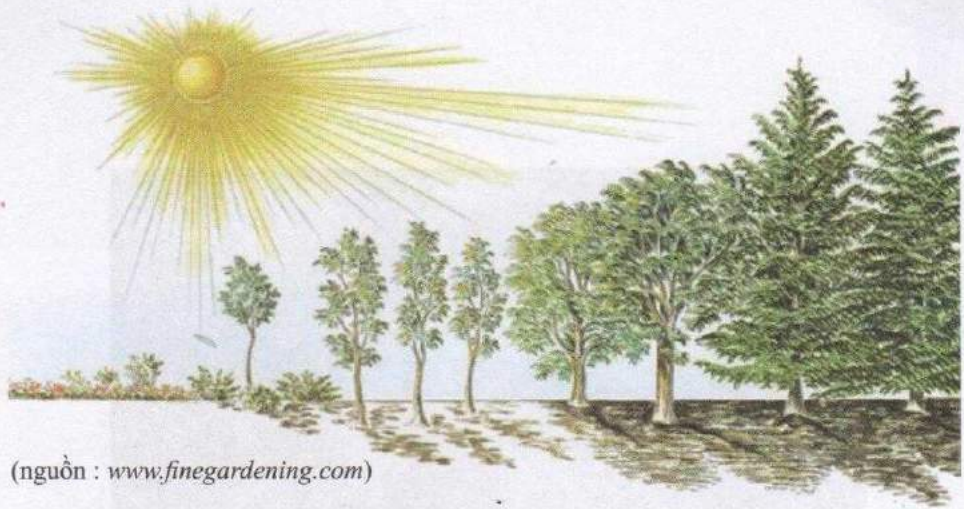


Hải đăng là một ngọn tháp được thiết kế để chiếu sáng ngoài biển bằng một hệ thống đèn và thấu kính với mục đích hỗ trợ cho các hoa tiêu định hướng và tìm đường trên biển. Luồng ánh sáng của ngọn hải đăng tạo thành một dãy sáng **hình tam giác** thật dài, thật sáng để hướng dẫn các tàu ra, vào bờ biển được an toàn.

Dọc suốt bờ biển Việt Nam cũng có rất nhiều ngọn hải đăng, trong đó nổi bật là ngọn **Hải đăng Kê Gà** (hoặc **Khe Gà**) tỉnh Bình Thuận. Đây là một ngọn tháp cao thấp đèn dùng cho tàu thuyền đi lại trong khu vực, và đã được sách *Kỉ lục Việt Nam* xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và cổ xưa nhất Việt Nam. Hiện nay, đảo Kê Gà với ngọn hải đăng đã trở thành điểm du lịch hấp dẫn với du khách. Ngoài ra, ngọn hải đăng Kê Gà còn là một di tích kiến trúc độc đáo.



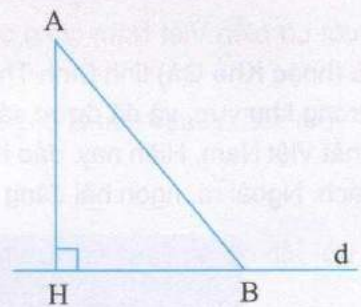
QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU



(nguồn : www.finegardening.com)

Ánh nắng mặt trời, thân cây và bóng cây cho ta hình ảnh của đường xiên, đường vuông góc và hình chiếu.

◆ Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên



Hình 7

Hình vẽ trên có đoạn thẳng AB là hình ảnh của tay cần, đoạn thẳng AH là hình ảnh của sợi cáp (từ đỉnh tay cần đến mặt đất), đường thẳng d là hình ảnh mặt đất.

- Đoạn thẳng AH gọi là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d; điểm H gọi là *chân* của đường vuông góc hay *hình chiếu* của điểm A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AB gọi là một *đường xiên* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.
- Đoạn thẳng HB gọi là *hình chiếu* của đường xiên AB trên d.
(AH còn gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d).



THỬ TÀI BẠN

Cho điểm A không thuộc đường thẳng d như hình vẽ.

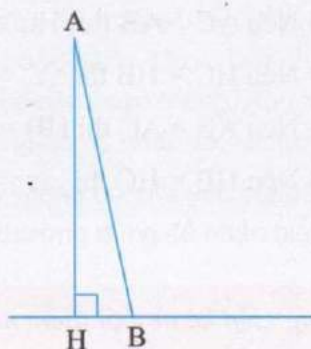
Hãy dùng êke để vẽ và tìm hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d . Vẽ hai đường xiên từ điểm A đến d . Tìm hình chiếu của hai đường xiên này trên d . Từ điểm A có thể kẻ được bao nhiêu đường vuông góc đến đường thẳng d ?

A
 d

◆ Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên



Tháp nghiêng Pisa (Ý)



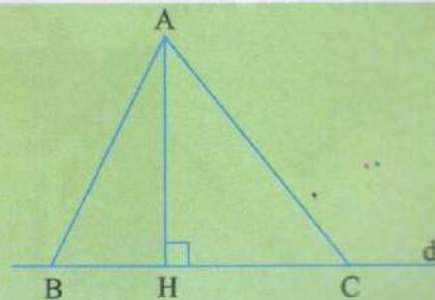
Hình 8

Hoạt động 8

Quan sát hình 8 là hình ảnh của tháp nghiêng Pisa (Ý). Trong đó, AB là hình ảnh của tháp, AH là khoảng cách từ đỉnh tháp đến mặt đất. Hãy so sánh độ dài của AB và AH.

Hoạt động 9

Từ một điểm A nằm ngoài đường thẳng d , vẽ đường vuông góc AH và các đường xiên AB, AC tùy ý (hình 9). Hãy so sánh AH với AB, AH với AC rồi rút ra kết luận (có thể dùng định lý quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác hoặc định lý Py-ta-go).



Hình 9

Khi so sánh đường vuông góc với đường xiên, ta có định lý sau :

Định lý 1

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Độ dài đường vuông góc AH được gọi là **khoảng cách** từ điểm A đến đường thẳng d .



THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác ABC nhọn. Tìm một điểm M trên cạnh BC sao cho độ dài đoạn thẳng AM là ngắn nhất.

♦ Các đường xiên và hình chiếu của chúng

Hoạt động 10

Điền vào các chỗ trống sau :

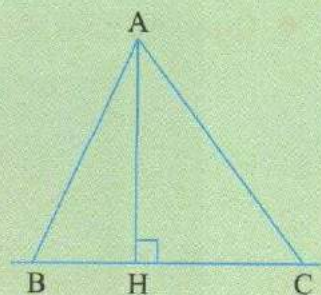
Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông AHB và AHC (hình 10), ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \quad (1)$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra được :

- Nếu $AC > AB$ thì $HC > \dots$
- Nếu $HC > HB$ thì $\dots > AB$.
- Nếu $AB = AC$ thì $HB = \dots$
- Nếu $HB = HC$ thì $\dots = AC$.



Hình 10

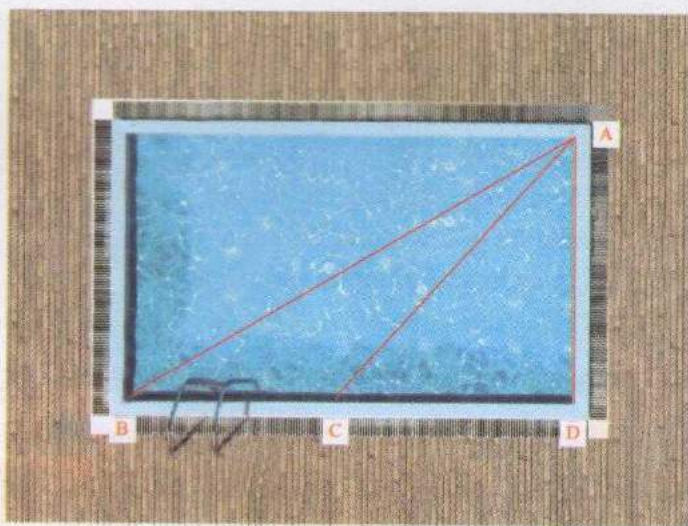
Định lý 2

Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :

- a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn ;
- b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn ;
- c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.



THỬ TÀI BẠN



Một người mới học bơi, để nâng dần khoảng cách bơi, anh ta nên chọn các đường bơi theo thứ tự nào trong các đường AB, AC, AD như hình trên ?

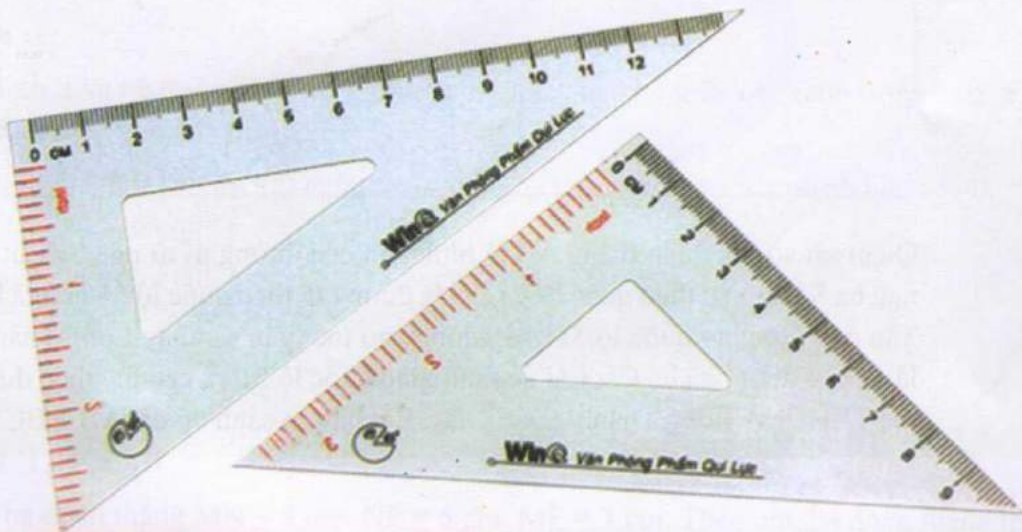
CÙNG KHÁM PHÁ



◆ Làm quen với êke

Trong cuộc sống, chúng ta thường sử dụng nhiều loại thước để đo đạc như thước đo góc, thước đo chiều dài, thước đo đường kính lỗ, thước dây ... nhằm phục vụ cho các nhu cầu khác nhau của con người. Chẳng hạn, thợ mộc thì sử dụng thước được làm bằng dây hoặc thước cuộn kéo được, thợ may sử dụng thước được làm bằng gỗ hoặc bằng dây... Còn trong trường học, học sinh thường sử dụng thước thẳng (dùng để đo và vẽ các đoạn thẳng), thước đo góc (còn gọi là thước đo độ, dùng để đo và vẽ các góc) và êke (dùng để đo hoặc vẽ các góc đặc biệt).

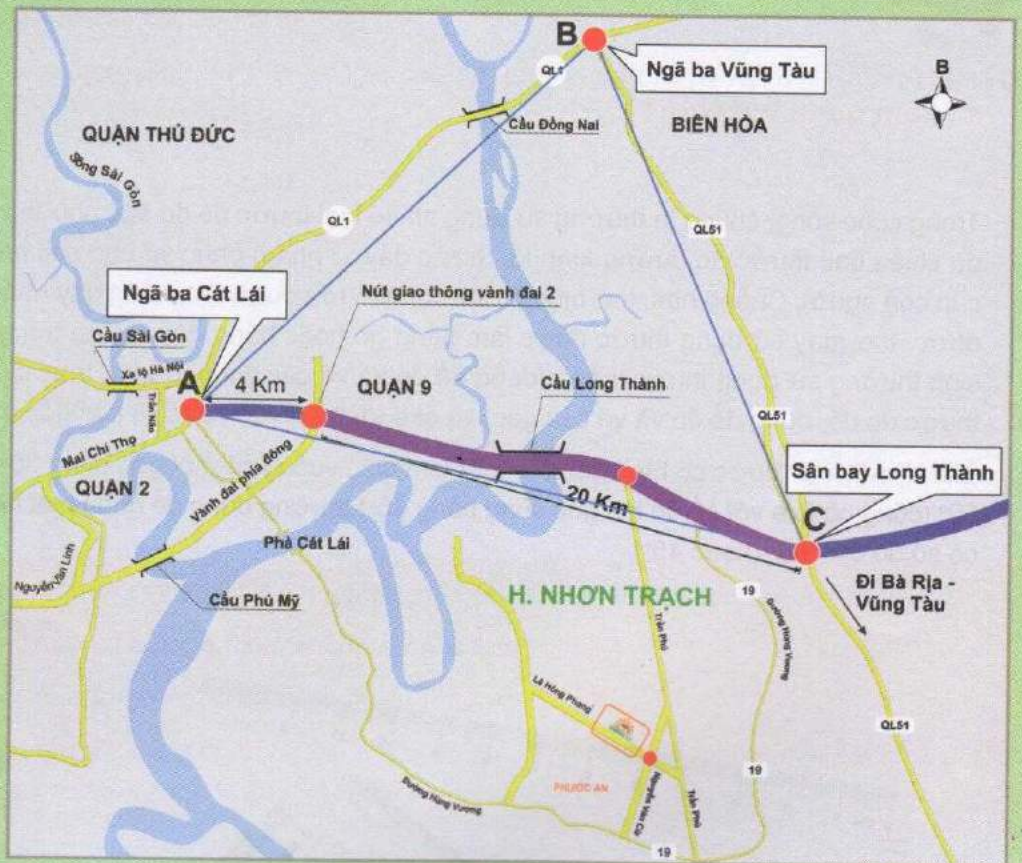
Êke là một loại thước có hình dạng là một tam giác vuông có một góc bằng 30° và một góc bằng 60° (cũng có êke với số đo hai góc cùng bằng 45°) thường dùng để nhận biết hoặc dựng các góc có số đo 30° , 60° (hoặc 45°).



QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

◆ Bất đẳng thức tam giác

Hoạt động 11



Quan sát sơ đồ, đoạn thẳng AB là hình ảnh của đường đi từ ngã ba Cát Lái đến ngã ba Vũng Tàu theo quốc lộ 1; BC là đường đi theo quốc lộ 51 từ ngã ba Vũng Tàu đến nút giao quốc lộ 51 với đường cao tốc (gần sân bay Long Thành); AC là đường đi từ ngã ba Cát Lái đến nút giao quốc lộ 51 và cao tốc theo đường cao tốc TP.HCM - Long Thành - Dầu Giây. Em hãy so sánh độ dài $AB + BC$ với AC .

Định lý

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Xét một tam giác ABC bất kì, ta đều có các bất đẳng thức sau :

$$AB + AC > BC ;$$

$$AB + BC > AC ;$$

$$AC + BC > AB.$$

Các bất đẳng thức trên được gọi là các bất đẳng thức tam giác.



THỬ TÀI BẠN

- Cho tam giác ABC cân có số đo như sau :
AB = 7 cm, AC = 4 cm. Tính độ dài cạnh BC.
- Tính chu vi của tam giác cân ABC biết :
AB = 10 cm, AC = 4 cm.

◆ Hệ quả của bất đẳng thức tam giác

Hoạt động 12

Từ bất đẳng thức tam giác $AB + BC > AC$, ta suy ra :

$$AB > AC - BC ;$$

$$BC > AC - AB.$$

Hãy viết các bất đẳng thức tương tự còn lại từ các bất đẳng thức tam giác $AB + AC > BC$ và $AC + BC > AB$.

Hoạt động 13

Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là các số nguyên, biết $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm thì cạnh BC có thể có độ dài là bao nhiêu ?

Hệ quả

Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Nhận xét

Từ định lí và hệ quả về bất đẳng thức tam giác, quan hệ giữa các cạnh trong tam giác còn có thể phát biểu gộp lại như sau :

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Chẳng hạn, trong tam giác ABC, với cạnh AB ta có :

$$AC - BC < AB < AC + BC$$

$$\text{hay } BC - AC < AB < AC + BC$$



THỬ TÀI BẠN

Cho ba đoạn thẳng $MN = 2$ cm, $NP = 6$ cm, $MP = 3$ cm. Theo em, ba đoạn thẳng trên có thể tạo thành một tam giác không ?

Lưu ý : Khi xét độ dài ba đoạn thẳng có thoả mãn bất đẳng thức tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng của hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Chú ý

Không phải ba độ dài nào cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.



◆ Đường cao tốc Thành phố Hồ Chí Minh – Long Thành – Dầu Giây



Đường cao tốc TP. Hồ Chí Minh – Long Thành – Dầu Giây thuộc tuyến đường cao tốc Bắc – Nam Việt Nam. Đường cao tốc này nối TP. Hồ Chí Minh với Đồng Nai, có điểm đầu tuyến là nút giao thông Cát Lái, Quận 2, TP. Hồ Chí Minh và điểm cuối là nút giao thông Dầu Giây, huyện Thống Nhất, tỉnh Đồng Nai.

Dự án đường cao tốc được khởi công xây dựng vào ngày 3/10/2009 với quy mô 4 - 8 làn xe trên tổng chiều dài 55,7 km. Trong đó, giai đoạn một chỉ xây dựng 4 làn xe trên toàn tuyến. Ngày 8/2/2015, tuyến cao tốc TP. Hồ Chí Minh – Long Thành – Dầu Giây được khánh thành và đưa vào sử dụng.



Như vậy, từ TP. Hồ Chí Minh đi nút giao thông Dầu Giây rút ngắn được 20 km, chỉ còn 1 giờ ; đi huyện Long Thành (Đồng Nai) còn 20 phút và đi Vũng Tàu còn 1 giờ 20 phút, giảm được từ 20% đến 30% chi phí vận tải.

THƯ GIÃN

Lựa chọn của người lái tàu



Hình trên là một chiếc tàu ở vị trí A đưa khách sang sông. C là vị trí bờ sông bên này mà tàu sẽ cập bến. Mũi tên màu đỏ cho biết hướng dòng sông đang chảy. Để đưa khách đến được vị trí C, người lái tàu sẽ không đưa tàu đi thẳng đến vị trí C mà lái sang vị trí B, rồi thả trôi tàu cập bến ở vị trí C. Theo em tại sao người lái tàu lại chọn đi đường vòng như vậy ?

Như vậy, trong thực tế, có phải lúc nào ta cũng chọn đoạn đường ngắn nhất để di chuyển không ?

BÀI TẬP

Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác

- Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 6$ cm. So sánh các góc của $\triangle ABC$.
 - Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.
- Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$.
 - Tìm cạnh lớn nhất của $\triangle ABC$.
 - Tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?
- Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} > 45^\circ$.
 - So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.
 - Lấy điểm K bất kì thuộc đoạn thẳng AC . So sánh độ dài các cạnh BK , BC .
- $\triangle ABC$ vuông tại A , tia phân giác của \widehat{B} cắt AC ở D . So sánh độ dài AD và DC .
- Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$). Tia phân giác của \widehat{BAC} cắt BC ở D . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.
 - Chứng minh: $\widehat{DEC} > \widehat{ADB}$.
 - So sánh độ dài BD và DC .
- Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có M là trung điểm của BC . So sánh BAM và MAC .
- Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 40^\circ$. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.
- Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = 10$ cm, $AC = 24$ cm. So sánh các góc của tam giác ABC .
- Cho tam giác ABC có góc B lớn hơn góc C , hai tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I . So sánh IB và IC .

10. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 13$ cm.

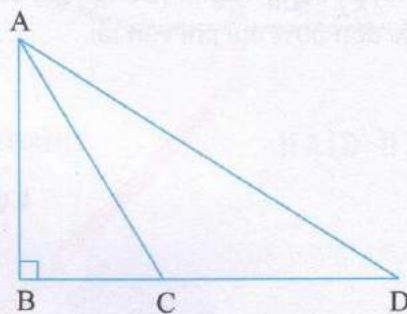
- So sánh các góc của $\triangle ABC$.
- Hỏi $\triangle ABC$ là tam giác gì? Vì sao?

11. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} < 60^\circ$.

- Chứng minh: $\widehat{ABC} > 60^\circ$.
- Chứng minh: $AB > BC$ và $AC > BC$.

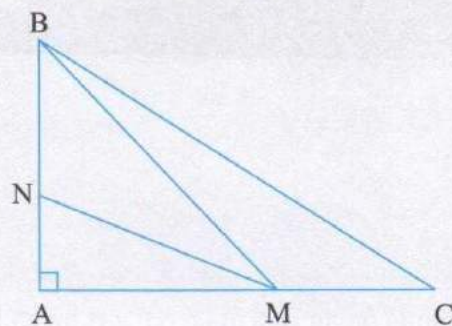
Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

12. Cho hình vẽ sau:



So sánh độ dài AB , AC , AD .

13. Cho hình vẽ sau:



Hãy chứng minh rằng:

- $BM < BC$.
 - $MN < BC$.
14. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông, cạnh lớn nhất là cạnh huyền.

15. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC), lấy điểm M nằm giữa A và H.

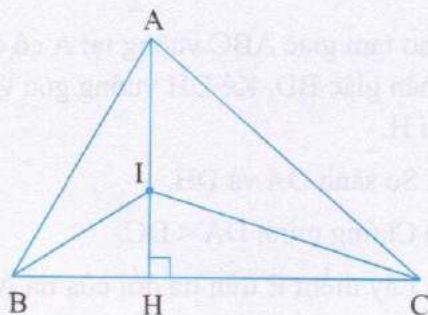
- Chứng minh $BH = HC$.
- Chứng minh $MB = MC$.
- Chứng minh $MC < AC$.

16. Chứng minh rằng trong một tam giác cân, độ dài đoạn thẳng nối đỉnh với một điểm bất kì của cạnh đáy thì luôn nhỏ hơn hoặc bằng độ dài của cạnh bên.

17. Cho tam giác DEF, I là trung điểm của EF. Kẻ EH vuông góc với DI tại H, FK vuông góc với DI tại K.

- Chứng minh $IH = IK$.
- Chứng minh $DE + DF > DH + DK$.
- Chứng minh $DH + DK = 2DI$.
- Chứng minh $DE + DF > 2DI$.

18. Cho hình vẽ sau có $AB < AC$.



- So sánh HB và HC.
- So sánh IB và IC.
- Chứng minh $AH < \frac{AB + AC}{2}$.

19. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi M là điểm nằm giữa A và H, tia BM cắt AC ở D.

- Chứng minh $BM < CM$.
- Chứng minh $DM < DH$.

Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức trong tam giác

20. Trong các bộ ba đoạn thẳng dưới đây, bộ ba nào là độ dài ba cạnh của một tam giác ?

- 4 cm, 5 cm, 7 cm.
- 2 cm, 4 cm, 6 cm.
- 3 cm, 4 cm, 8 cm.

21. Cho tam giác ABC có $BC = 1$ cm, $AB = 4$ cm. Tìm độ dài cạnh AC, biết rằng độ dài này là một số nguyên. Tam giác ABC là tam giác gì ?

22. Cho tam giác ABC có M là một điểm nằm bên trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC.

- So sánh MA với $MI + IA$, từ đó chứng minh $MA + MB < IB + IA$.
- So sánh IB với $IC + CB$, từ đó chứng minh $IB + IA < CA + CB$.
- Chứng minh : $MA + MB < CA + CB$.
- So sánh :

$$MA + MB + MC \text{ và } AB + AC + BC.$$

23. Tìm chu vi của tam giác ABC cân, biết độ dài hai cạnh của nó là $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm. Hãy cho biết tam giác ABC cân tại đỉnh nào ?

24. Cho tam giác ABC cân tại A, lấy điểm D trên đoạn thẳng AB, qua D vẽ DE song song với BC (E thuộc AC).

- Tam giác ADE là tam giác gì ? Vì sao ?
- Gọi O là giao điểm của BE và CD. Chứng minh

$$OB + OC + OD + OE > DE + BC.$$

- Chứng minh $2BE > DE + BC$.



LUYỆN TẬP

Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác

25. So sánh các góc của tam giác ABC, biết :
- Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.
 - Tam giác ABC có $AB = BC > AC$.
26. So sánh các cạnh của tam giác DEF, biết :
- Tam giác DEF cân tại D và $\hat{E} = 45^\circ$.
 - Góc ngoài tại đỉnh D bằng 120° , $\hat{F} = 54^\circ$.
 - Số đo các góc D, E, F của tam giác lần lượt tỉ lệ với 2, 3, 4.
27. Góc ở đáy của tam giác cân nhỏ hơn 60° . Hãy cho biết cạnh đáy hay cạnh bên của tam giác cân là lớn nhất, vì sao ?
28. Cho tam giác ABC có góc A tù. Trên cạnh AB lấy điểm D.
- So sánh các đoạn thẳng CA, CD và CB.
 - Trên cạnh AC lấy điểm E, so sánh DE và BC.
29. Tam giác ABC cân tại A, trên cạnh BC lấy các điểm D, E sao cho $BD = DE = EC$. Chứng minh rằng trong ba góc BAD, DAE, EAC thì góc DAE là góc lớn nhất.
30. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$). Kẻ $BD \perp AC$ ($D \in AC$) và $CE \perp AB$ ($E \in AB$). Đoạn thẳng BD cắt CE tại I.
- So sánh \widehat{ABD} và \widehat{ACE} .
 - Chứng minh $IB < IC$.
 - Chứng minh $CE > BD$.

Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

31. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, kẻ AH vuông góc với BC tại H.
- So sánh AC và AH.
 - So sánh AB và AH.
 - So sánh BH và HC.
32. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết khoảng cách từ A đến BC bằng 5cm. Tính độ dài AB.
33. Cho tam giác ABC đều, kẻ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh độ dài đường xiên AC bằng hai lần hình chiếu của AC lên đường thẳng BC.
34. Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của AC. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu kẻ từ A và C đến đường thẳng BM.
- Chứng minh: $AB < \frac{BE + BF}{2} < BC$.
35. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD. Kẻ DH vuông góc với BC tại H.
- So sánh DA và DH.
 - Chứng minh $DA < DC$.
 - Lấy điểm E trên tia đối của tia AC sao cho tam giác BED cân tại B. So sánh BE và BC.
36. Cho tam giác ABC vuông tại A, BD là phân giác của góc ABC (D thuộc AC). Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, qua điểm C vẽ tia Cx vuông góc với CA và cắt tia BD tại E. Chứng minh chu vi tam giác ADB nhỏ hơn chu vi tam giác CDE.

Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức trong tam giác

37. Tính chu vi tam giác cân ABC, biết :

a) $AB = 5 \text{ cm}, AC = 12 \text{ cm}.$

b) $AB = 7 \text{ cm}, AC = 13 \text{ cm}.$

38. Cho tam giác ABC có M thuộc tia phân giác ngoài của góc C. Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = CB$.

a) So sánh MI với MB.

b) Chứng minh: $MA + MB > AC + BC$.

39. Cho tam giác ABC có điểm D nằm giữa B và C.

Chứng minh :

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < AD < \frac{AB + AC + BC}{2}.$$

40. Cho tam giác ABC có điểm M nằm bên trong tam giác.

Chứng minh :

$$MA + MB + MC > \frac{AB + AC + BC}{2}.$$

41. Cho hai điểm A và B nằm về hai phía của đường thẳng d. Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho $AC + CB$ là nhỏ nhất.

42. Trên bản đồ của một tỉnh, người ta đánh dấu ba khu vực A, B, C là ba đỉnh của một tam giác, biết khoảng cách $AC = 30 \text{ km}, AB = 90 \text{ km}.$

a) Nếu đặt ở khu vực C máy phát sóng truyền thanh có bán kính hoạt động 60 km thì tại khu vực B có nhận được tín hiệu không? Vì sao?

b) Cũng câu hỏi như trên với máy phát sóng có bán kính hoạt động 120 km.

CHỦ ĐỀ

6

CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

Tính chất tia phân giác của một góc

Tính chất ba đường phân giác của tam giác

Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng

Tính chất ba đường trung trực của tam giác

Tính chất ba đường cao của tam giác



(nguồn : www.vnamet.vn)

Điện gió Bạc Liêu là một dự án xây dựng nhà máy sản xuất điện dùng năng lượng gió, sử dụng công nghệ sạch nhằm cắt giảm khí thải nhà kính, giảm ô nhiễm không khí giúp cải thiện môi trường một cách bền vững.

Các tước bin gió cho ta hình ảnh của các đường thẳng đồng quy trong tam giác.



TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

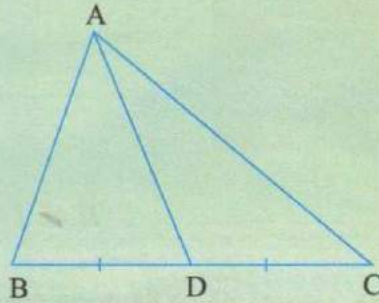
◆ Đường trung tuyến của tam giác

Hoạt động

1

Vẽ tam giác ABC, xác định trung điểm D của cạnh BC.

Nối đỉnh A với điểm D. Đoạn thẳng AD được gọi là *đường trung tuyến* của tam giác ABC.



Hình 11

Trên hình 11, em hãy vẽ tiếp các đường trung tuyến của tam giác ABC từ các đỉnh còn lại và cho biết mỗi tam giác có mấy đường trung tuyến.

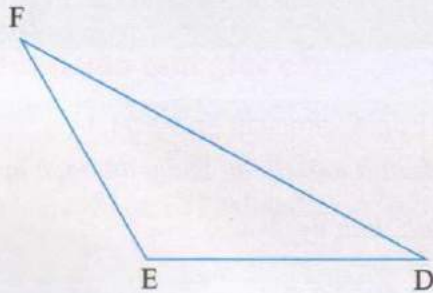
Ở hình 11, đoạn thẳng AD được gọi là *đường trung tuyến* xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC của tam giác ABC. Đôi khi đường thẳng AD cũng gọi là *đường trung tuyến* của tam giác ABC.



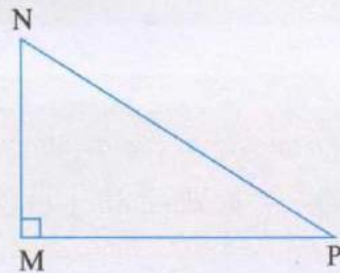
THỬ TÀI BẠN

1. Vẽ đường trung tuyến DH của tam giác DEF (hình 12).

Vẽ đường trung tuyến MK của tam giác vuông MNP (hình 13).



Hình 12



Hình 13

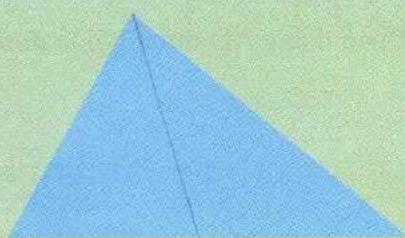
2. Vẽ tam giác nhọn EFG và tất cả các đường trung tuyến của nó.

Chú ý: Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

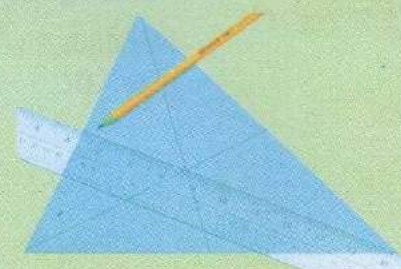
♦ Tính chất ba đường trung tuyến trong tam giác

Hoạt động 2

Cắt một tam giác bằng giấy rồi gấp lại để xác định trung điểm của một cạnh. Kẻ đoạn thẳng nối trung điểm này với đỉnh đối diện (hình 14a). Bằng cách tương tự, hãy vẽ tiếp hai đường trung tuyến còn lại.



a)



b)

Hình 14

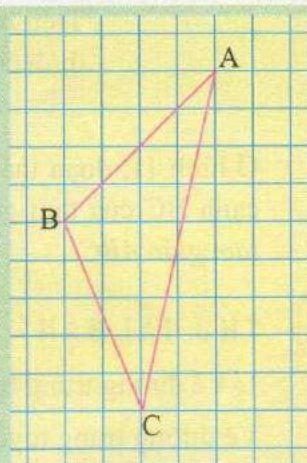
Quan sát tam giác trên hình 14b, trên đó đã vẽ ba đường trung tuyến. Có nhận xét gì về vị trí của ba đường trung tuyến trong một tam giác ?

Hoạt động 3

Em hãy đếm ô rồi vẽ lại tam giác ABC ở hình 15 vào vở. Vẽ hai đường trung tuyến BE và CF của tam giác. Hai trung tuyến này cắt nhau tại G. Tia AG cắt BC tại D.

Em hãy quan sát và cho biết :

- AD có phải là đường trung tuyến của tam giác ABC không ?
- Các tỉ số $\frac{AG}{AD}$, $\frac{BG}{BE}$, $\frac{CG}{CF}$ bằng bao nhiêu ?



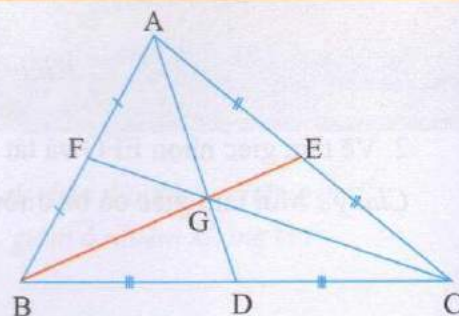
Hình 15

Định lí

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Trong tam giác ABC (hình 16), các đường trung tuyến AD, BE, CF cùng đi qua điểm G (hay còn gọi là *đồng quy* tại điểm G). Điểm G gọi là *trọng tâm* của tam giác ABC.

Ta có : $\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$.



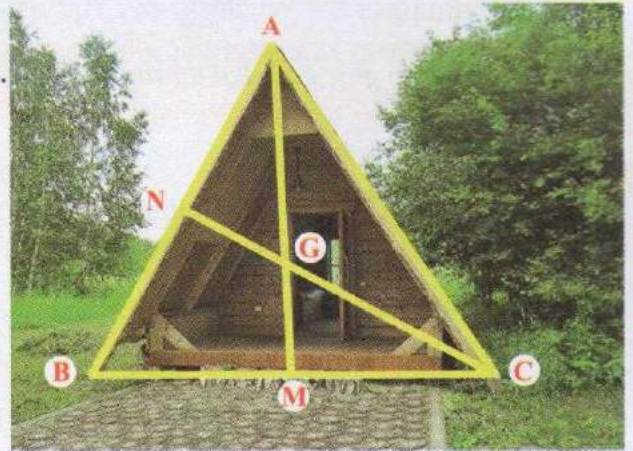
Hình 16



THỬ TÀI BẠN

Ở hình 17, G là trọng tâm của tam giác ABC.

- a) Cho biết $AM = 12$ m. Tính AG và GM.
 b) Cho biết $GN = 2,5$ m. Tính CN.



Hình 17



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Ở hình 18, G là trọng tâm của tam giác AEF với đường trung tuyến AM.

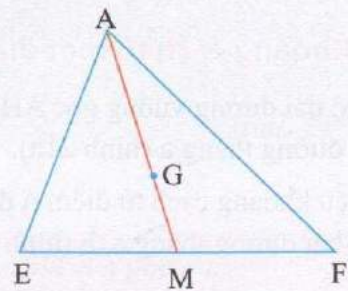
Các bạn An, Bình, Chi lần lượt đưa ra các tỉ lệ giữa các đoạn thẳng MG, AM và AG như sau :

An nói : $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$.

Bình nói : $\frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$.

Chi nói : $\frac{AG}{GM} = 3$.

Theo em, bạn nào đưa ra tỉ lệ đúng ?



Hình 18

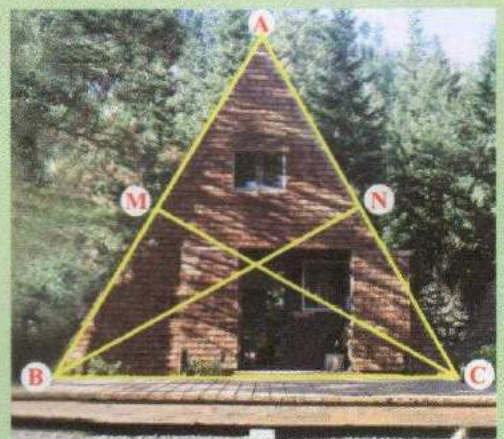
♦ Áp dụng vào tam giác cân

Hoạt động

4

Mặt cắt ngôi nhà trong hình 19 là tam giác ABC cân tại A, có BM và CN là hai đường trung tuyến.

Hãy đo và so sánh BM và CN.



Hình 19

Định lý thuận

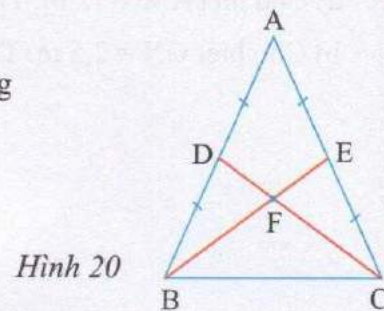
Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.



THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác ABC cân tại A (hình 20) có BE và CD là hai đường trung tuyến cắt nhau tại F. Biết $BE = 9$ cm.

Tính độ dài đoạn thẳng DF.



Hình 20

Định lý đảo

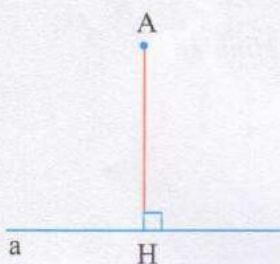
Nếu tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì đó là tam giác cân.



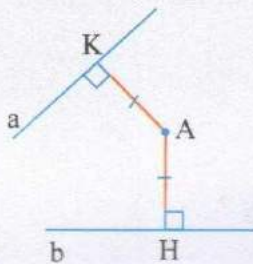
TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

◆ Khoảng cách từ một điểm đến hai đường thẳng

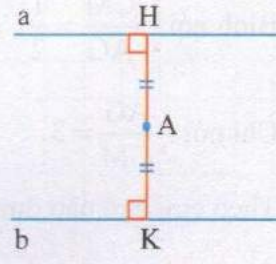
- Độ dài đường vuông góc AH kẻ từ điểm A đến đường thẳng a gọi là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng a (hình 21a).
- Nếu khoảng cách từ điểm A đến hai đường thẳng a, b bằng nhau thì ta nói rằng: Điểm A cách đều hai đường thẳng a, b (hình 21b, 21c).



a)



b)



c)

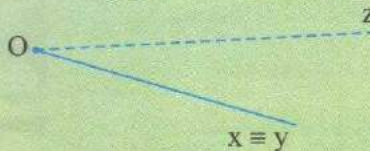
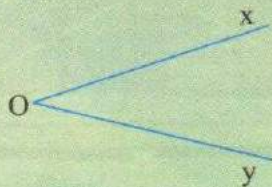
Hình 21

◆ Định lý về tính chất các điểm thuộc tia phân giác

Hoạt động

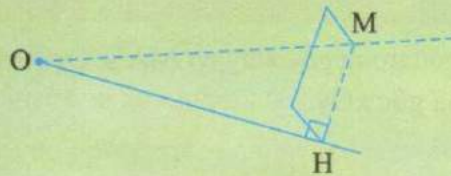
5

Cắt một góc xOy bằng giấy rồi gấp lại sao cho cạnh Ox trùng với cạnh Oy để xác định tia phân giác Oz của góc đó (hình 22).



Hình 22

Từ một điểm M tùy ý trên Oz , gấp MH vuông góc với hai cạnh trùng nhau Ox , Oy . Độ dài nếp gấp MH chính là khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh Ox , Oy (hình 23).



Hình 23

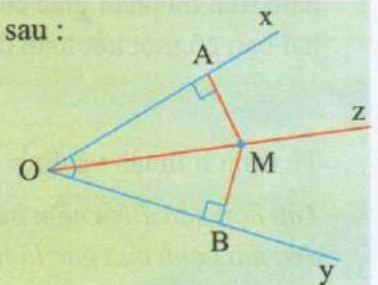
Hãy nhận xét về các khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh Ox , Oy trong hình trên.

Hoạt động 6

Cho bài toán (hình 24) có giả thiết và kết luận như sau :

GT	M thuộc tia phân giác Oz của góc xOy $MA \perp Ox$, $MB \perp Oy$
KL	$MA = MB$

Hãy chứng minh bài toán trên.



Hình 24

Định lý thuận

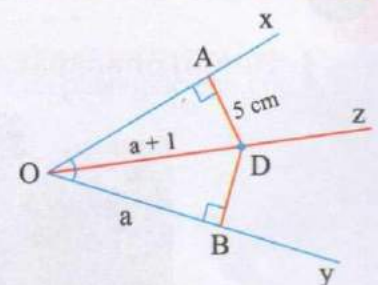
Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



THỬ TÀI BẠN

Quan sát hình 25, biết Oz là tia phân giác của góc xOy .

Cho biết $DA \perp Ox$, $DB \perp Oy$, $DA = 5$ cm, $OD = a + 1$ (cm), $OB = a$ (cm). Hãy tìm giá trị của a .



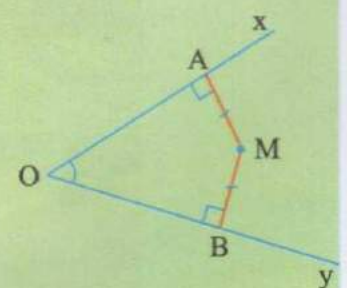
Hình 25

Hoạt động 7

Cho một điểm M nằm bên trong góc xOy sao cho khoảng cách từ M đến hai cạnh Ox , Oy bằng nhau (hình 26).

Hãy so sánh góc AOM với góc BOM .

Em có rút ra kết luận gì về đường thẳng OM đối với góc xOy ?



Hình 26

Định lý đảo

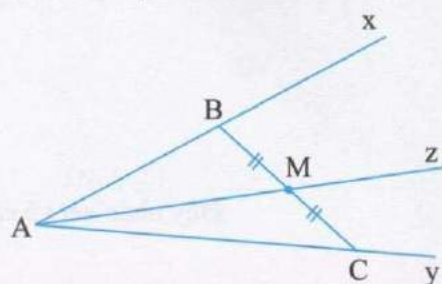
Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

Xem hình 26, điểm M nằm bên trong góc xOy có $MA \perp Ox$, $MB \perp Oy$ và $MA = MB$ thì điểm M nằm trên tia phân giác của góc xOy .

✓ BẠN NÀO ĐÚNG ?

Quan sát hình 27, Lan cho rằng vì $MB = MC$ nên điểm M nằm trên tia phân giác của góc xAy .

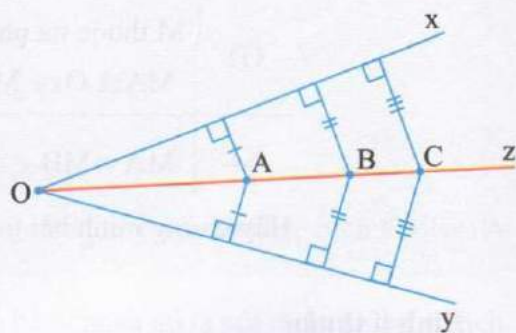
Minh cho rằng chưa đủ yếu tố để kết luận điểm M nằm trên tia phân giác của góc xAy . Em hãy giúp hai bạn có một kết luận đúng nhé !



Hình 27

Từ định lý thuận và định lý đảo, ta có nhận xét :

Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.



Hình 28

TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

◆ Đường phân giác của tam giác



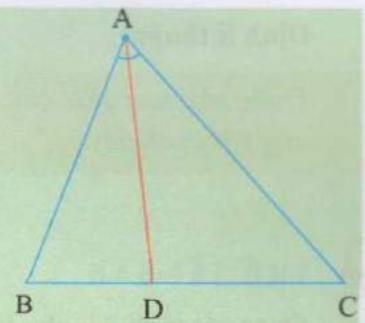
Hình 29. Hình ảnh về đường phân giác của một góc.

Hoạt động 8

Vẽ tam giác ABC có tia phân giác của góc A cắt BC tại D (hình 30). Khi đó đoạn thẳng AD được gọi là *đường phân giác* (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC.

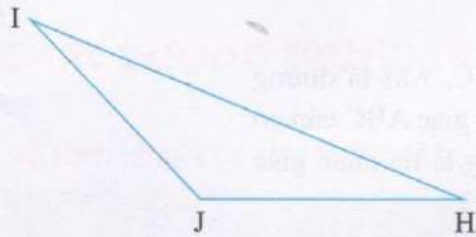
Đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AD là đường phân giác của tam giác.

Hãy vẽ các đường phân giác còn lại của tam giác ABC.

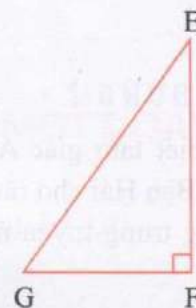


Hình 30

 THỬ TÀI BẠN



a)



b)

Hình 31

a) Ở hình 31a, hãy vẽ đường phân giác HN của tam giác HIJ.

b) Ở hình 31b, hãy vẽ các đường phân giác của tam giác EFG.

Chú ý: Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

Hoạt động 9

Ở hình 32, cho biết tam giác ABC cân tại A, AM là tia phân giác của góc A.

Hãy điền vào chỗ trống cho thích hợp:

Xét tam giác AMB và tam giác AMC có:

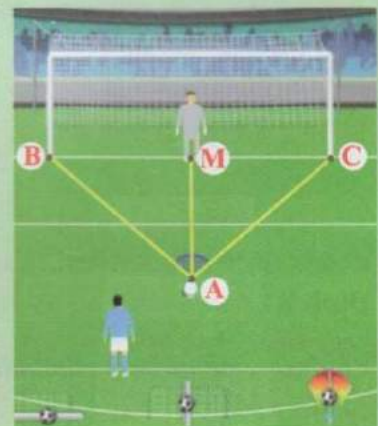
$AB = \dots\dots\dots$ ($\dots\dots\dots$).

Góc $\dots\dots\dots =$ góc CAM ($\dots\dots\dots$). $\dots\dots\dots$ là cạnh chung.

Vậy $\Delta \dots\dots\dots = \Delta \dots\dots\dots$ (c.g.c).

Suy ra $MB = \dots\dots\dots$

Do đó $\dots\dots\dots$ là trung tuyến của tam giác cân ABC.



Hình 32

Định lý thuận

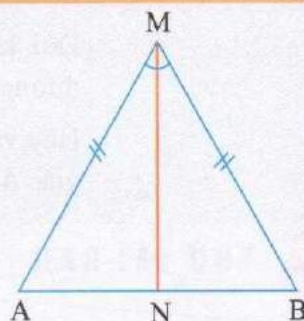
Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.



THỬ TÀI BẠN

Quan sát hình 33, cho biết tam giác MAB cân tại M, MN là tia phân giác của góc AMB.

Biết $AB = 12$ cm. Tính AN.



Hình 33

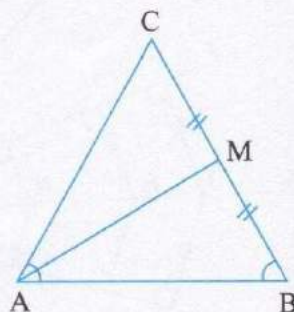


BẠN NÀO ĐÚNG ?

Ở hình 34, biết tam giác ABC cân tại C, AM là đường trung tuyến. Bạn Hải cho rằng : “Vì tam giác ABC cân có AM là đường trung tuyến nên AM cũng là tia phân giác của góc A”.

Bạn Hà nói : “AM không thể là phân giác của góc A”.

Theo em, bạn nào đúng ? Tại sao ?



Hình 34

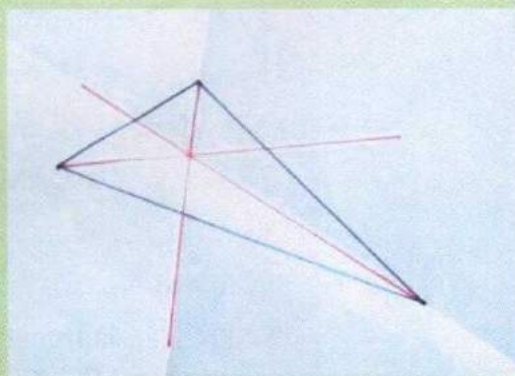
Định lý đảo

Tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó cân.

♦ Tính chất ba đường phân giác của tam giác

Hoạt động 10

Vẽ một tam giác trên giấy. Dùng phương pháp gấp giấy để xác định ba đường phân giác của tam giác (hình 35). Sau khi gấp xong, em hãy mở tam giác ra quan sát và nhận xét : Ba nếp gấp có cùng đi qua một điểm không ?



Hình 35

Định lý

Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác.



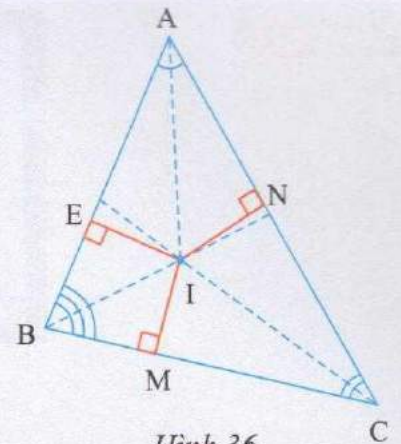
THỬ TÀI BẠN

Dựa vào hình 36, hãy viết giả thiết, kết luận và chứng minh định lí theo gợi ý sau :

Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ đỉnh B và C của tam giác ABC , kẻ $IM \perp BC$, $IE \perp AB$, $IN \perp AC$ (xem hình vẽ).

Hãy chứng minh :

- $IM = IN = IE$.
- AI là tia phân giác của góc A .



Hình 36

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

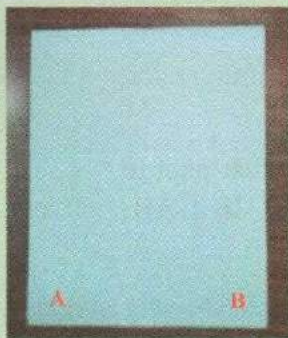
◆ Định lí về tính chất của các điểm thuộc đường trung trực

Hoạt động 11

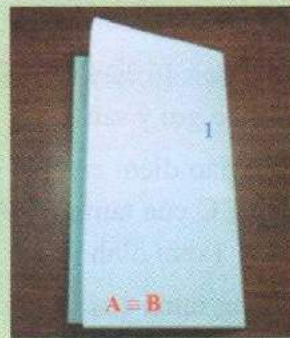


Hình 37

Các cột điện trên đường Phạm Văn Đồng TP. Hồ Chí Minh (hình 37) cho ta hình ảnh đường trung trực của một đoạn thẳng. Điểm A nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC . Em hãy nhận xét xem điểm A có cách đều hai đầu đoạn thẳng BC không ?



a)

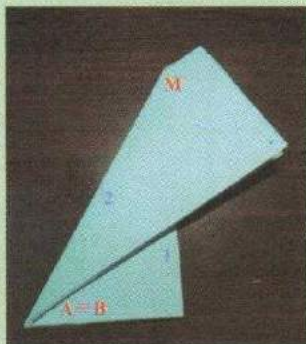


b)

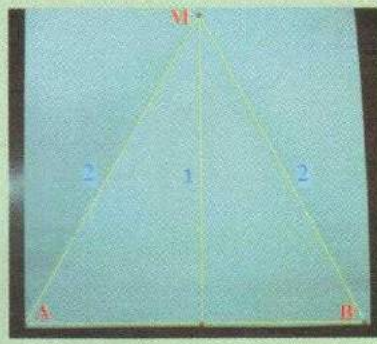
Hình 38

Cắt một mảnh giấy trong đó có một mép cắt là đoạn thẳng AB (hình 38a).

Gấp mảnh giấy sao cho A trùng với B. Nếp gấp 1 chính là đường trung trực của đoạn thẳng AB (hình 38b).



a)



b)

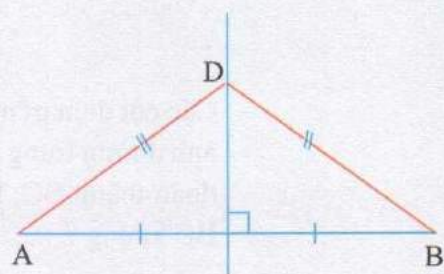
Hình 39

Từ một điểm M tùy ý trên nếp gấp 1, gấp đoạn thẳng MA (MB) được nếp gấp 2. Độ dài nếp gấp 2 chính là khoảng cách từ M đến hai điểm A và B. Ta có, $MA = MB$ (hình 39a, 39b).

Định lí thuận

Điểm nằm trên trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

GT	D nằm trên trung trực của đoạn thẳng AB.
KL	$DA = DB$

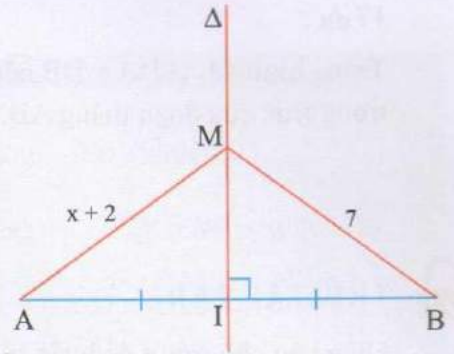


Hình 40



THỬ TÀI BẠN

Ở hình 41, biết Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .
Điểm M thuộc đường Δ , $MA = x + 2$, $MB = 7$. Tính x ?



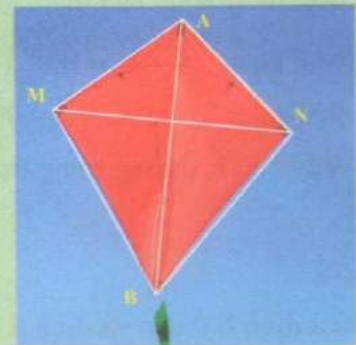
Hình 41

Hoạt động 13



Hình 42. Festival diều quốc tế tại Vũng Tàu, năm 2012.

Khi làm diều, các nghệ nhân phải chú ý độ cân bằng của cánh diều, khi đó $AM = AN$, $BM = BN$ (hình 43). Theo em, các điểm A, B có nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN không ?



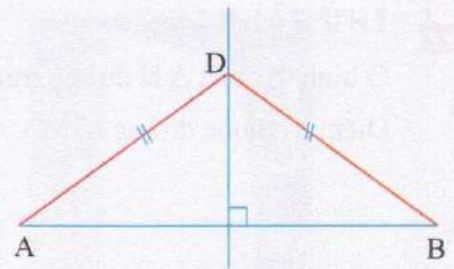
Hình 43

Định lý đảo

Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Ví dụ :

Trong hình 44, vì $DA = DB$ nên điểm D sẽ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB .

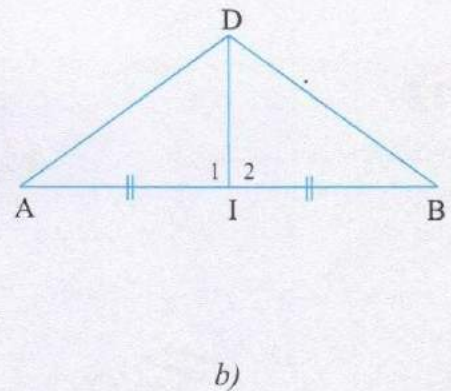
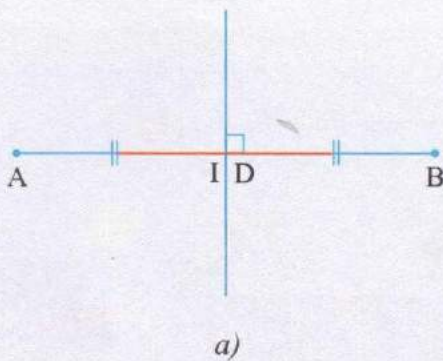


Hình 44



THỬ TÀI BẠN

Điền vào chỗ trống để hoàn thành phần chứng minh định lí đảo.



Hình 45

Chứng minh

Xét hai trường hợp :

• $D \in AB$ (hình 45a) : Vì $DA = DB$ (gt)

nên D là của đoạn thẳng AB , do đó D thuộc của đoạn thẳng AB .

• $D \notin AB$ (hình 45b) : Kẻ đoạn thẳng nối D với trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Ta có $\triangle DAI = \triangle DBI$ (c.c.c).

Suy ra $\hat{I}_1 = \dots\dots\dots$

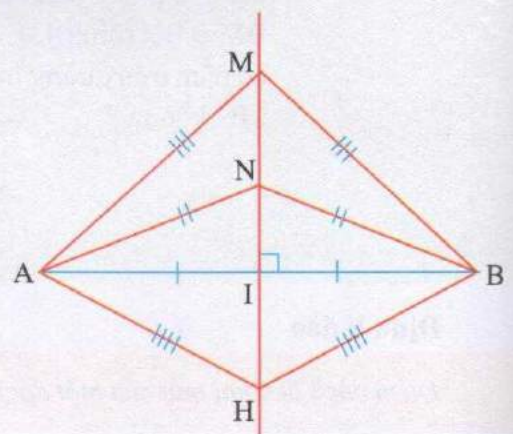
Mặt khác : $\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 180^\circ$ (.....)

nên = = 90° .

Vậy ... là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Từ định lí thuận và định lí đảo, ta có nhận xét sau :

Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



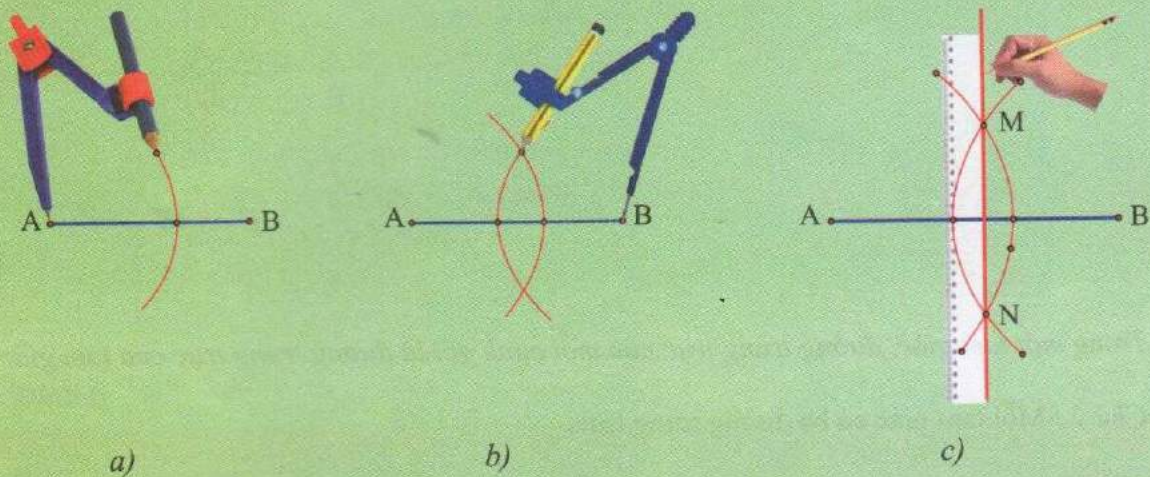
Hình 46

♦ Ứng dụng

Hoạt động 14

Dựng đường trung trực của đoạn thẳng AB bằng thước thẳng và compa.

- Lấy A làm tâm vẽ cung tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}AB$ (hình 47a).
- Lấy B làm tâm vẽ cung tròn có bán kính bằng bán kính ở trên (hình 47b).
- Hai cung tròn này cắt nhau tại M và N (hình 47c). Dùng thước vẽ đường thẳng MN, đó chính là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



Hình 47

Chú ý:

- Khi vẽ hai cung tròn trên, ta phải lấy bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}AB$ thì hai cung tròn đó mới có hai điểm chung.
- Giao điểm của đường thẳng MN với đoạn thẳng AB là trung điểm của đoạn thẳng AB nên cách vẽ trên cũng là cách dựng trung điểm của đoạn thẳng bằng thước và compa.



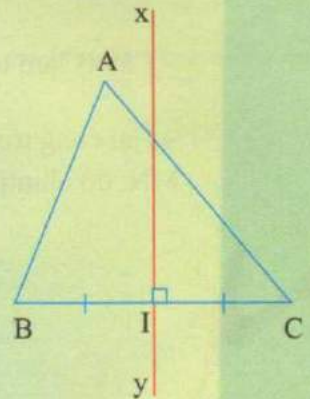
TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

◆ Đường trung trực của tam giác

Hoạt động 15

Cho tam giác ABC , em hãy dùng thước kẻ và compa vẽ đường trung trực xy của cạnh BC .

Trong hình 48, xy là trung trực ứng với cạnh BC của tam giác ABC .

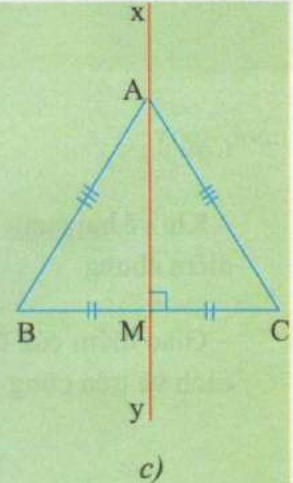
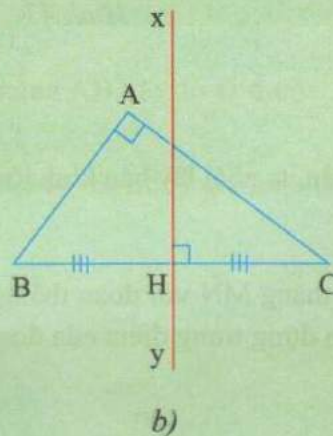
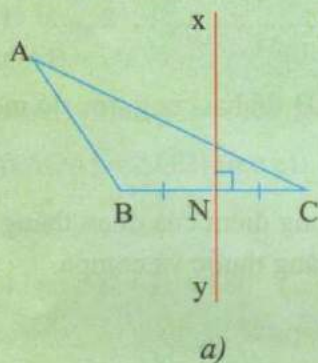


Hình 48

Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

Chú ý: Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

Hoạt động 16



Hình 49

Em có nhận xét gì khi quan sát các đường trung trực ứng với cạnh BC trong tam giác nhọn (hình 48), tam giác tù (hình 49a), tam giác vuông (hình 49b) so với đường trung trực ứng với cạnh BC của tam giác cân (hình 49c) ?

Tính chất

Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.



THỬ TÀI BẠN

Dựa vào hình 49c, hãy ghi giả thiết, kết luận và chứng minh tính chất trên.

Định lí

Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực ứng với cùng một cạnh thì tam giác đó cân.

♦ Tính chất ba đường trung trực của tam giác

Hoạt động 17

Vẽ hình tam giác, sau đó sử dụng phương pháp gấp hình để xác định các đường trung trực của ba cạnh tam giác (xem hình 50).

Em hãy quan sát và nhận xét xem ba đường trung trực đó có cùng đi qua một điểm hay không?



Hình 50

Định lí

Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

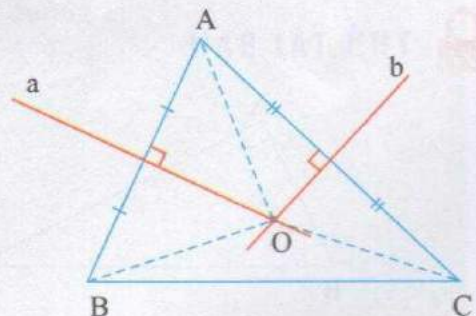


THỬ TÀI BẠN

Em hãy điền các nội dung thích hợp vào chỗ trống để thực hành chứng minh định lí về tính chất ba đường trung trực của tam giác.

Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực ứng với cạnh AB , AC (hình 51). Ta chứng minh O cũng nằm trên đường trung trực ứng với cạnh BC của tam giác ABC và $OA = OB = OC$.

	$\triangle ABC$
GT	a là đường trung trực của AB b là đường trung trực của AC a và b cắt nhau tại O
KL



Hình 51

Chứng minh

Ta có : $OA = \dots$ (vì O nằm trên đường trung trực a của đoạn thẳng AB).

$\dots = OC$ (vì O nằm trên đường trung trực b của đoạn thẳng AC).

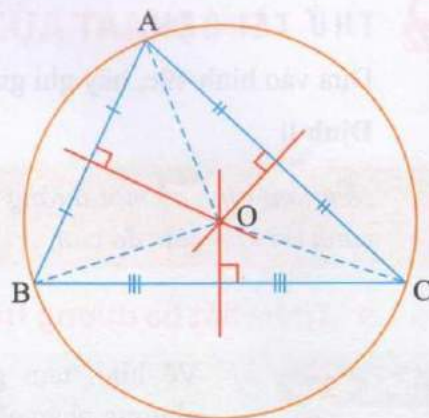
Suy ra : $\dots = \dots (= OA)$.

Do đó điểm nằm trên đường trung trực của cạnh
 Vậy ba đường trung trực của tam giác ABC cùng đi qua điểm O và ta có :

$$\dots = \dots = \dots$$

Chú ý :

- Vì giao điểm O của ba đường trung trực của tam giác ABC cách đều ba đỉnh của tam giác đó nên có một đường tròn tâm O đi qua ba đỉnh A, B, C.
- Ta gọi đường tròn đó là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC (hình 52).



Hình 52

TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

◆ Đường cao trong tam giác

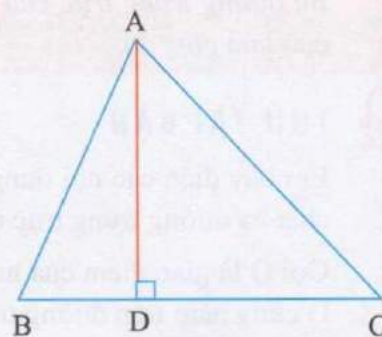
Hoạt động 18

Em hãy vẽ một tam giác ABC trên giấy, sau đó dùng ê-ke vẽ đoạn thẳng vuông góc từ đỉnh A đến cạnh đối diện BC của tam giác.

Trong một tam giác, đoạn thẳng vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là *đường cao* của tam giác đó.

Trong hình 53, đoạn thẳng AD là đường cao của tam giác ABC. Ta còn nói AD là đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.

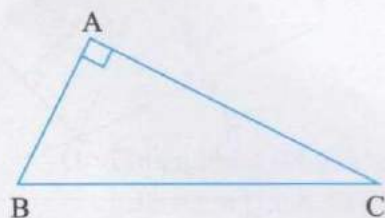
Đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AD là đường cao của tam giác ABC.



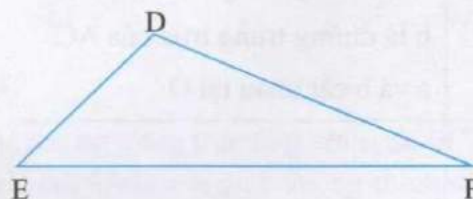
Hình 53



THỬ TÀI BẠN



a)



b)

Hình 54

Vẽ đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác vuông ABC (hình 54a).

Vẽ đường cao xuất phát từ đỉnh F của tam giác tù DEF (hình 54b).

Chú ý : Mỗi tam giác có ba đường cao.

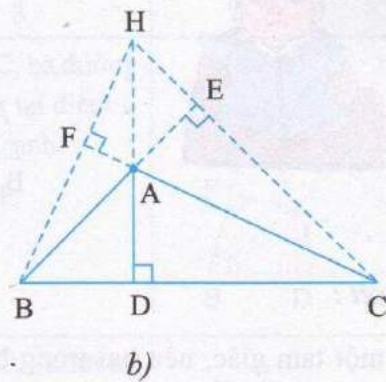
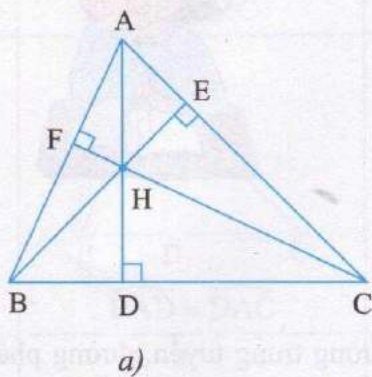
♦ Tính chất ba đường cao của tam giác

Hoạt động 19

Trong hình 53 và 54, em hãy vẽ các đường cao còn lại của các tam giác. Theo em, các đường cao đã vẽ trong mỗi tam giác có cùng đi qua một điểm hay không?

Định lý

Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm.



Hình 55

Trong các hình 55a và 55b, các đường cao AD, BE, CF cùng đi qua (đồng quy tại) điểm H. Điểm H gọi là *trực tâm* của tam giác ABC.



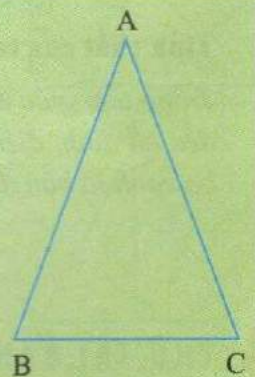
THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy dựng trực tâm H và nhận xét về vị trí của trực tâm H trong tam giác ABC.

♦ Về các đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

Hoạt động 20

Cho tam giác ABC cân tại A (hình 56), em hãy vẽ các đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực và đường cao xuất phát từ đỉnh A. Em có nhận xét gì về các đường này?



Hình 56

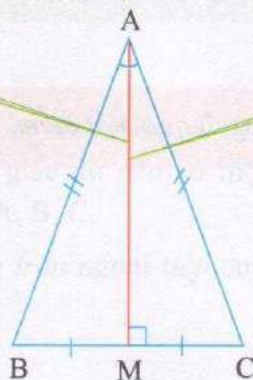
Tính chất của tam giác cân

Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

AM vừa là đường trung tuyến,
đường phân giác

Tam giác ABC
cân tại A

AM vừa là đường trung trực,
đường cao



Hình 57

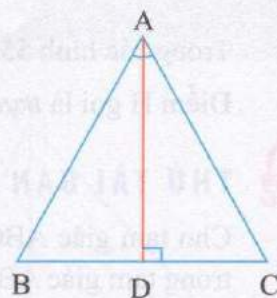
Nhận xét :

Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.



THỬ TÀI BẠN

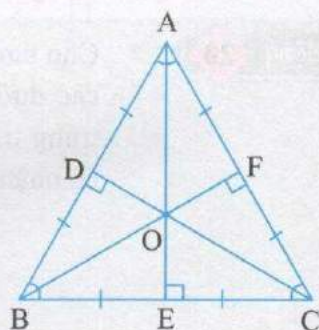
Cho tam giác ABC có AD là đường cao đồng thời cũng là đường phân giác (hình 58). Chứng minh rằng $\widehat{B} = \widehat{C}$.



Hình 58

Tính chất của tam giác đều

Trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau (hình 59).

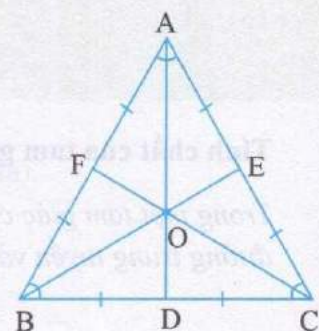


Hình 59



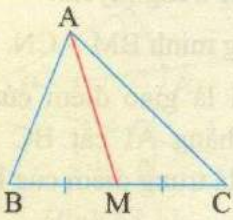
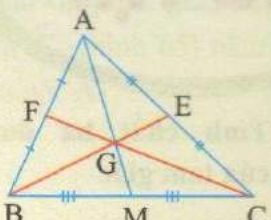
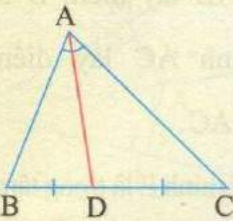
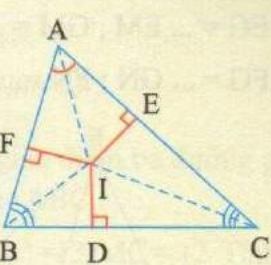
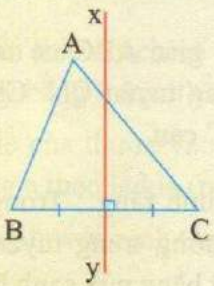
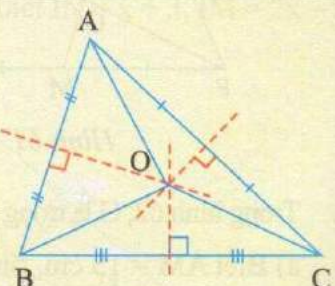
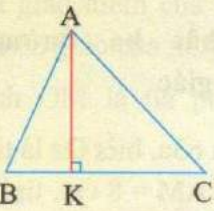
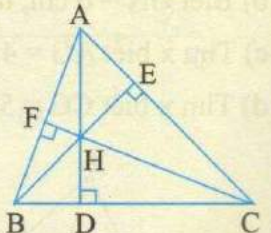
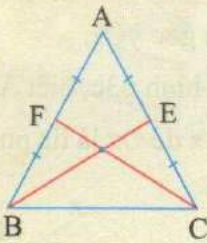
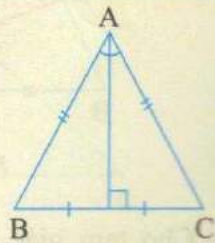
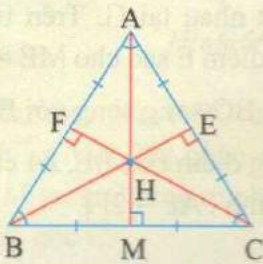
THỬ TÀI BẠN

Ta đã biết trong một tam giác cân hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau. Dựa vào tính chất đó, hãy chứng minh trong một tam giác đều ba đường trung tuyến ứng với ba cạnh thì bằng nhau (hình 60).



Hình 60

GHI NHỚ

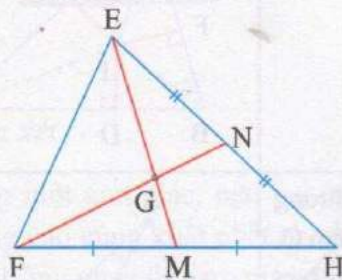
Đường trung tuyến	 <p style="text-align: center;">$MB = MC$</p>	<p>Trong tam giác ABC, ba đường trung tuyến AM, BE, CF đồng quy tại điểm G.</p> <p>Điểm G gọi là trọng tâm của tam giác ABC.</p> $\frac{GA}{MA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$	
Đường phân giác	 <p style="text-align: center;">$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$</p>	<p>Trong tam giác ABC, ba đường phân giác đồng quy tại điểm I, điểm I cách đều ba cạnh.</p> <p style="text-align: center;">$ID = IE = IF$.</p>	
Đường trung trực		<p>Trong tam giác ABC, ba đường trung trực đồng quy tại điểm O, điểm O cách đều ba đỉnh tam giác.</p> <p style="text-align: center;">$OA = OB = OC$.</p> <p>Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.</p>	
Đường cao		<p>Trong tam giác ABC, ba đường cao đồng quy tại một điểm H.</p> <p>Điểm H gọi là trực tâm của tam giác.</p>	
<p>Tam giác ABC cân tại A \Leftrightarrow trung tuyến BE = trung tuyến CF.</p>		<p>Tam giác ABC cân tại A \Leftrightarrow Hai trong bốn đường sau trùng nhau : Đường trung trực của cạnh BC, đường trung trực, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ đỉnh A.</p>	
<p>Nếu tam giác ABC đều thì trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh và điểm (nằm trong tam giác) cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.</p>			
			

BÀI TẬP

Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

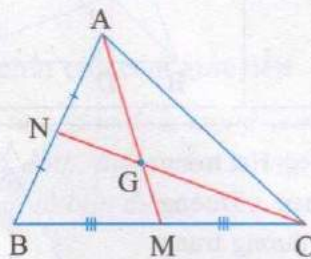
1. Hãy điền số thích hợp vào chỗ trống trong các đẳng thức sau (hình 61) :

$EG = \dots EM$; $GM = \dots EM$; $GM = \dots EG$
 $FG = \dots GN$; $FN = \dots GN$; $FN = \dots FG$.



Hình 61

2. Trong hình 62, G là trọng tâm tam giác ABC.
- Biết $AM = 15$ cm, tính AG.
 - Biết $GN = 6$ cm, tính CN.
 - Tìm x biết $AG = 4x + 6$, $AM = 9x$.
 - Tìm x biết $CG = 5x$, $GN = 3x - 2$.



Hình 62

3. Cho tam giác nhọn ABC. Trung tuyến AM và CN cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MG$.
- Chứng minh BG song song với EC.
 - Gọi I là trung điểm của BE, AI cắt BG tại F. Chứng minh : $AF = 2FI$.

4. Cho tam giác ABC có $AB = AC$, BM và CN là hai trung tuyến.

- Chứng minh $BM = CN$.
- Gọi I là giao điểm của BM và CN, đường thẳng AI cắt BC tại H. Chứng minh H là trung điểm của BC.

5. Cho tam giác nhọn ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$.

- Chứng minh E là trọng tâm tam giác BCD.
- Gọi M là trung điểm của DC. Chứng minh ba điểm B, M, E thẳng hàng.

6. Cho tam giác ABC có trung tuyến BM bằng trung tuyến CN. Chứng minh tam giác ABC cân.

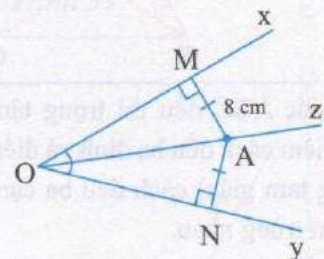
7. Chứng minh rằng : Trong một tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền.

Tính chất ba đường phân giác của tam giác

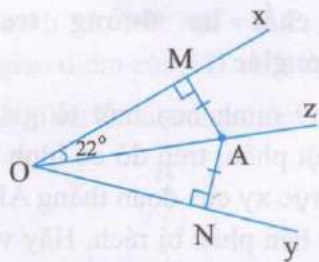
8. a) Ở hình 63a, biết Oz là tia phân giác của góc xOy, $AM = 8$ cm, tính AN.

b) Ở hình 63b, biết $AM = AN$, $\widehat{xOz} = 22^\circ$. Tính góc yOz.

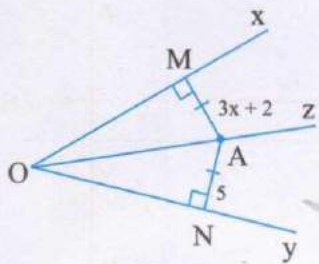
c) Ở hình 63c, biết $AM = 3x + 2$, $AN = 5$. Tìm x để Oz là tia phân giác của góc xOy.



Hình 63 a)



Hình 63 b)



Hình 63 c)

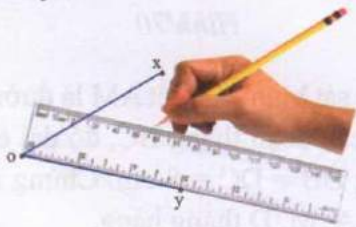
9. Hình 64 giới thiệu cách vẽ tia phân giác của góc xOy bằng thước thẳng (hai lề).

– Áp một lề của thước vào cạnh Oy, kẻ đường thẳng a theo lề kia (hình 64a).

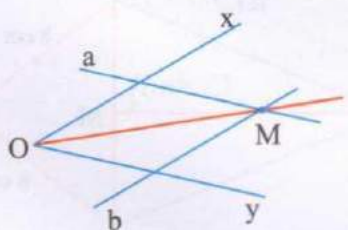
– Làm tương tự với cạnh Ox, ta kẻ đường thẳng b.

– Gọi M là giao điểm của a và b, ta có OM là tia phân giác của xOy (hình 64b).

Chứng minh OM là tia phân giác của góc xOy.



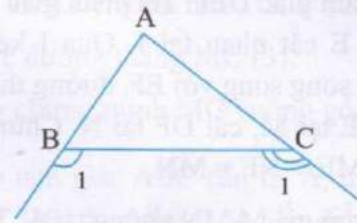
a)



b)

Hình 64

10. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng giao điểm của hai tia phân giác của hai góc ngoài \widehat{B}_1 và \widehat{C}_1 (hình 65) nằm trên tia phân giác của góc A.



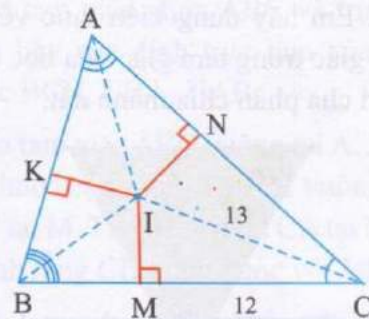
Hình 65

11. Ở hình 66, I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC.

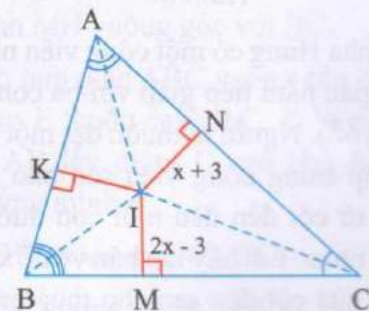
a) Hình 66a, biết $IC = 13$, $MC = 12$. Tính IK.

b) Hình 66b, biết $IN = x + 3$, $IM = 2x - 3$.

Tim x.



a)



b)

Hình 66

12. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ trung tuyến AM. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I. Chứng minh CI là tia phân giác của góc C.

13. Cho tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác của các góc B và C gặp nhau tại M. Tia AM cắt BC tại H. Chứng minh rằng H là trung điểm của BC.

14. Cho tam giác DEF. Tia phân giác của góc D và E cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với EF, đường thẳng này cắt DE tại M, cắt DF tại N. Chứng minh rằng $ME + NF = MN$.

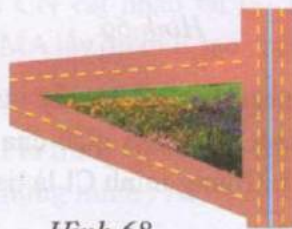
15. Cho tam giác AMN vuông tại A. Tia phân giác của góc M và N gặp nhau tại I. Tia MI cắt AN tại R. Kẻ RT vuông góc với AI ($T \in AI$). Chứng minh rằng $AT = RT$.

16. Một gia đình sống trong trang trại cạnh bờ sông (hình 67). Người cha muốn chia đều mảnh đất cho hai người con sao cho mỗi người đều có một phần đất cạnh bờ sông. Em hãy dùng kiến thức về đường phân giác trong tam giác vừa học để giúp người cha phân chia mảnh đất.



Hình 67

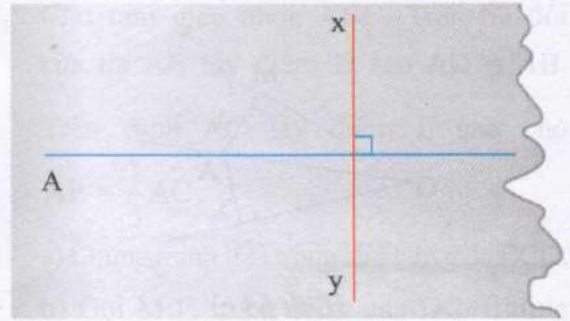
17. Gần nhà Hùng có một công viên nhỏ hình tam giác nằm tiếp giáp với ba con đường (hình 68). Người ta muốn đặt một cột đèn cao áp trong công viên sao cho khoảng cách từ cột đèn đến mỗi con đường đều bằng nhau. Em hãy lập bản vẽ để xác định vị trí của cột đèn sao cho thỏa mãn điều kiện trên. Hãy giải thích cách thực hiện.



Hình 68

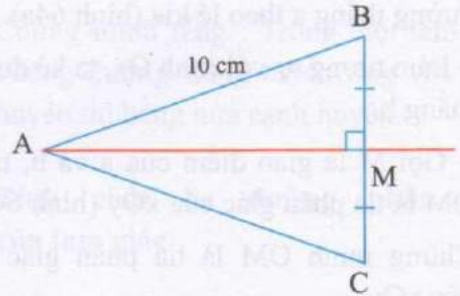
Tính chất ba đường trung trực của tam giác

18. Hình 69 minh họa một tờ giấy bị rách một phần, trên đó có hình vẽ đường trung trực xy của đoạn thẳng AB và điểm B nằm bên phần bị rách. Hãy vẽ lại hình 69 và dựng lại điểm B bằng hai cách.



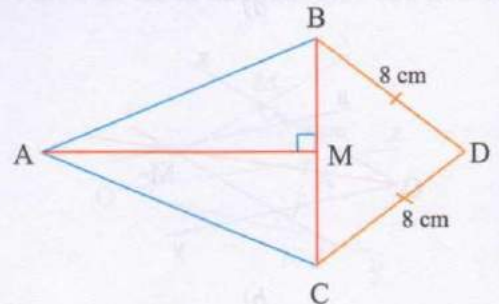
Hình 69

19. Quan sát hình 70, biết M là trung điểm của BC, AM vuông góc với BC và độ dài $AB = 10$ cm. Tính AC.



Hình 70

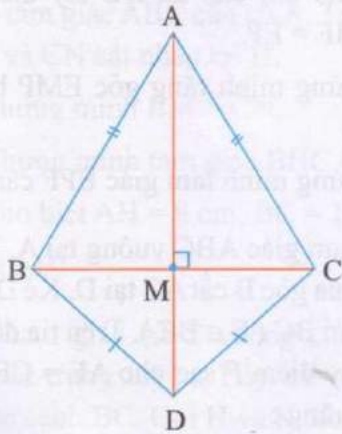
20. Quan sát hình 71, biết AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC, độ dài các đoạn thẳng $DB = DC = 8$ cm. Chứng minh ba điểm A, M, D thẳng hàng.



Hình 71

21. Xem hình 72, biết $AB = AC$, $DB = DC$, M là giao điểm của AD và BC .

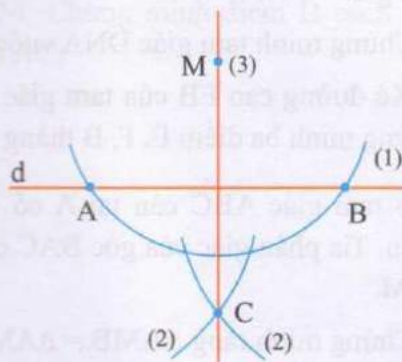
Chứng minh M là trung điểm của BC .



Hình 72

22. Cho hai điểm M và N nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng EF . Chứng minh $\triangle EMN = \triangle FMN$.
23. Hình 73 minh họa cho cách dựng đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước bằng thước kẻ và compa.

Cho đường thẳng d và điểm M không nằm trên đường thẳng d .



Hình 73

– Lấy M làm tâm, vẽ một cung tròn cắt đường thẳng d tại hai điểm A và B ($A \neq B$) (1).

– Lấy A, B làm tâm vẽ hai cung tròn (cùng bán kính trên) cắt nhau tại C ($C \neq M$) (2).

– Vẽ đường thẳng MC (3).

Hãy chứng minh MC vuông góc với d .

24. Cho tam giác ABC cân tại A , trung tuyến AM . Trên đoạn thẳng AM lấy điểm N tùy ý.
- a) Chứng minh rằng tam giác NBC cân.
- b) Chứng minh rằng tam giác ANB bằng tam giác ANC .

Tính chất ba đường cao của tam giác

25. Cho tam giác nhọn ABC và trực tâm H . Em hãy xác định trực tâm của các tam giác BCH, CHA, HAB .
26. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm H thuộc cạnh AB . Vẽ HM vuông góc với BC tại M . Tia MH cắt tia CA tại N . Chứng minh rằng CH vuông góc với NB .
27. Cho tam giác ABC vuông góc tại A . Trên tia BA lấy điểm M sao cho $BM = BC$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại H . Chứng minh MH vuông góc với BC .
28. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Lấy điểm E thuộc cạnh AC . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AE$. Chứng minh :
- a) DE vuông góc với BC .
- b) BE vuông góc với DC .

LUYỆN TẬP

29. Một bác thợ mộc muốn cắt một mặt bàn hình tròn có kích thước lớn nhất từ một tấm gỗ hình tam giác (hình 74). Em hãy vẽ lại hình ảnh tấm gỗ hình tam giác trên giấy và đề xuất phương án giúp bác thợ mộc cắt được mặt bàn hình tròn theo yêu cầu.



Hình 74

30. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Tia phân giác của góc B cắt AC tại M. Kẻ MN vuông góc với BC ($N \in BC$).
- Chứng minh rằng tam giác ABM bằng tam giác NBM.
 - Chứng minh AN vuông góc với BM.
 - Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh AN là tia phân giác của góc HAM.
 - Gọi I là giao điểm của AH với BM. Chứng minh rằng NI vuông góc với AB.
31. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AD, G là trọng tâm. Trên tia đối của tia DG lấy điểm E sao cho $DE = DG$.
- Chứng minh rằng $BG = GC = CE = BE$.
 - Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ACE$.
 - Nếu $CG = \frac{1}{2}AE$ thì tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?

32. Cho tam giác MNP cân tại M ($MN = MP > NP$). Đường trung trực của MP tại D cắt đường thẳng NP tại E. Trên tia đối của tia DE lấy điểm F sao cho $MF = EP$.

a) Chứng minh rằng góc EMP bằng góc EPM.

b) Chứng minh tam giác EPF cân.

33. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Kẻ DE vuông góc với BC ($E \in BC$). Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = CE$. Chứng minh rằng:

a) BD là trung trực của AE.

b) $AD < DC$.

c) Ba điểm E, D, F thẳng hàng.

34. Cho tam giác DEF cân tại D, kẻ trung tuyến EM. Trên tia đối của tia ME lấy điểm N sao cho $MN = ME$.

a) Chứng minh $DE = FN$ và tam giác DFN cân.

b) Trên tia đối của tia FD, lấy điểm A sao cho $FA = FD$. Chứng minh F là trọng tâm tam giác NEA.

c) Chứng minh tam giác DNA vuông.

d) Kẻ đường cao EB của tam giác AEN. Chứng minh ba điểm E, F, B thẳng hàng.

35. Cho tam giác ABC cân tại A có góc A nhọn. Tia phân giác của góc BAC cắt BC tại M.

a) Chứng minh rằng $\triangle AMB = \triangle AMC$.

b) Vẽ trung tuyến CE của tam giác ABC cắt AM tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

c) Biết $BM = 12$ cm, $AB = 20$ cm. Tính độ dài AG.

d) Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N. Chứng minh ba điểm B, G, N thẳng hàng.

36. Cho tam giác ABC cân tại A. Trung tuyến BM và CN cắt nhau tại H.

- Chứng minh $BM = CN$.
- Chứng minh tam giác BHC cân.
- Cho biết $AH = 8 \text{ cm}$, $BC = 18 \text{ cm}$.

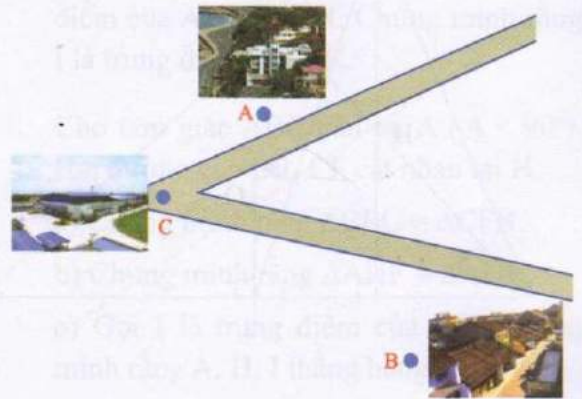
Tính AB.

37. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AM là trung tuyến. Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B và C xuống đường thẳng AD.

- Chứng minh tam giác AKC bằng tam giác BHA.
- Gọi I là giao điểm của AM với CK. Chứng minh đường thẳng DI vuông góc với AC.
- Chứng minh KM là tia phân giác góc HKI.

38. Cho tam giác ABC cân tại A có AM là đường trung tuyến, D là điểm tùy ý thuộc AM. Chứng minh điểm D cách đều AB và AC.

39. Hai thị trấn A và B nằm gần hai trục đường cùng dẫn đến nhà máy C chuyên sản xuất sữa (hình 75). Để mở rộng thị trường tiêu thụ và thuận lợi cho việc phân phối sữa, giám đốc nhà máy quyết định xây một cửa hàng giới thiệu và phân phối sản phẩm với yêu cầu khoảng cách từ cửa hàng đến hai trục đường phải bằng nhau, đồng thời cửa hàng phải cách đều cả hai thị trấn A và B. Theo hình 75, em hãy lập một bản vẽ thỏa mãn yêu cầu trên để xác định vị trí cửa hàng cần xây và nêu rõ cách xác định.



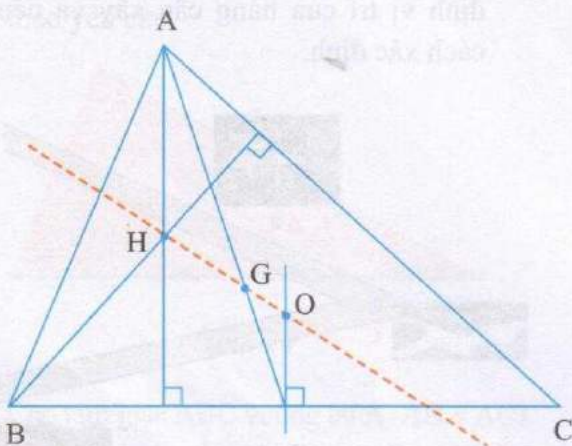
Hình 75

40. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Tia AH cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của BC.

CÙNG KHÁM PHÁ



◆ Đường thẳng Ô-ler (Euler)



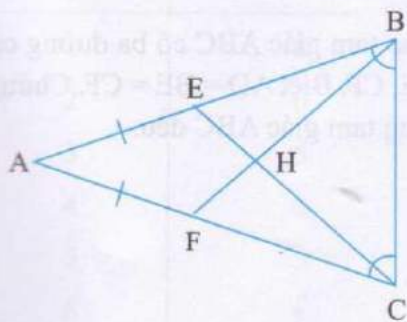
Năm 1765, Ô-ler (Leonhard Euler, 1707 – 1783) đã chứng minh được rằng trong một tam giác không đều ABC thì giao điểm O của ba đường trung trực (tâm đường tròn ngoại tiếp), giao điểm G của ba đường trung tuyến (trọng tâm), giao điểm H của ba đường cao (trực tâm) cùng nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O gọi là *đường thẳng Ô-ler* của tam giác ABC, được đặt theo tên của tác giả.

Ô-ler sinh ra và lớn lên ở Thụy Sĩ, làm giáo sư Toán học tại Sankt – Peterburg (Nga). Ông được xem là nhà Toán học viết nhiều nhất. Ông bị mù hoàn toàn trong 17 năm cuối cuộc đời, nhưng khoảng thời gian đó là lúc ông cho ra đời hơn nửa số bài ông viết.

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1. Ở hình 76, cho biết :
 $AE = AF, \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Chứng minh AH là đường trung trực của BC.



Hình 76

2.



A ●



B ●



Hình 77

Hai làng A và B nằm cùng phía bên bờ sông (hình 77). Hằng ngày, các em học sinh phải vượt sông đến trường ở bên kia sông trên những chiếc bè gỗ. Để bảo đảm an toàn cho học sinh, người ta dự định

xây một cây cầu bắc ngang qua sông. Hãy tìm địa điểm C trên bờ sông để xây cầu sao cho tổng quãng đường từ đầu cầu đến hai làng A và B là ngắn nhất.

3. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), vẽ đường cao AH. Đường trung trực của cạnh BC cắt AC tại M, cắt BC tại N.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BMN} = \widehat{HAC}$.

b) Kẻ $MI \perp AH$ ($I \in AH$), gọi K là giao điểm của AH với BM. Chứng minh rằng I là trung điểm của AK.

4. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $\triangle BEC = \triangle CFB$.

b) Chứng minh rằng $\triangle AHF = \triangle AHE$.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng A, H, I thẳng hàng.

5. Cho tam giác MNP nhọn. Các trung tuyến ME, NF cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia FN lấy điểm D sao cho $FD = FN$.

a) Chứng minh rằng $\triangle MFN = \triangle PFD$.

b) Trên đoạn thẳng FD lấy điểm H sao cho F là trung điểm của GH. Gọi K là trung điểm của DP. Chứng minh ba điểm M, H, K thẳng hàng.

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có

$$AB = \frac{1}{2}AC, AD \text{ là tia phân giác } \widehat{BAC}$$

($D \in BC$), gọi E là trung điểm của AC.

a) Chứng minh rằng $DE = DB$.

b) AB cắt DE tại K. Chứng minh rằng $\triangle DCK$ cân và B là trung điểm của đoạn thẳng AK.

c) AD cắt CK tại H. Chứng minh rằng $AH \perp KC$.

d) Biết $AB = 4$ cm. Tính DK.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của góc C cắt AB ở M. Từ B kẻ BH vuông góc với đường thẳng CM ($H \in CM$). Trên tia đối của tia HC lấy điểm E sao cho $HE = HM$.

a) Chứng minh rằng $\triangle MBE$ cân.

b) Chứng minh rằng $\widehat{EBH} = \widehat{ACM}$.

c) Chứng minh rằng $EB \perp BC$.

d) Đường thẳng BE cắt đường thẳng AC tại N. Tia phân giác của \widehat{NAB} cắt đường thẳng BH tại D, tia ND cắt CM tại F. Tính số đo \widehat{NFC} .

8. Cho tam giác DEF vuông tại D có $\widehat{F} = 30^\circ$. Đường trung trực của EF cắt DF tại M. Chứng minh rằng EM là tia phân giác của góc DEF.

9. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường trung trực của BC cắt AC ở M. Chứng minh rằng $AM + BM = AC$.

10. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF. Biết $AD = BE = CF$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. Phần Đại số

1. Điểm kiểm tra cuối năm môn Toán của lớp 7C được tổng hợp lại trong bảng sau :

Số thứ tự	Điểm kiểm tra
1	8
2	6
3	5
4	5
5	5
6	4
7	6
8	9
9	7
10	6
11	5
12	8
13	9
14	5
15	10
16	6
17	6
18	9
19	9
20	5

Số thứ tự	Điểm kiểm tra
21	8
22	7
23	6
24	6
25	10
26	6
27	8
28	6
29	6
30	7
31	6
32	5
33	6
34	7
35	9
36	9
37	9
38	8
39	8
40	5

- a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì và số các giá trị là bao nhiêu ?
- b) Lập bảng tần số.
- c) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật.
- d) Tính số trung bình cộng.
- e) Tìm mốt của dấu hiệu.
2. Điền số thích hợp vào ô trống để được đẳng thức đúng :
- a) $x^2y^3 + 2x^2y^3 = x^2y^3$;

b) $-x^3y^3 + 2y^3x^3 = \square x^3y^3;$

c) $2x^2y^3z + \square x^2y^3z = -2x^2y^3z;$

d) $-x^3y^3z + \square zy^3x^3 = x^3y^3z.$

3. Cho biểu thức

$$A = 0,3x^3y^5 - 3x^3y^5 + x^3y^5 + 7x^3y^5.$$

Muốn tính nhanh giá trị của biểu thức A tại $x = 2, y = 3$, trước tiên ta phải làm gì? Hãy tính giá trị đó.

4. Cho hai đơn thức $0,3xy.3z$ và $-xy.2z.x$. Hãy tìm tích của hai đơn thức này sau khi thu gọn.

5. Đa thức $x^4 + 4x^2 + 3$ có nghiệm không? Vì sao?

6. Cho đa thức

$$A(x) = 5x^3 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1 + 3x^4 - 3x^3.$$

a) Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử của A(x) theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Chứng minh đa thức A(x) không có nghiệm.

7. Một nhóm bạn gọi hai xe taxi, một chiếc loại 5 chỗ và một chiếc loại 7 chỗ. Giá cước của xe 5 chỗ (7 chỗ) là: 10 km đầu tiên thì trả 15 000 đồng (17 000 đồng) cho mỗi kilômét, từ hơn 10 km cho tới 30 km thì trả 13 000 đồng (15 000 đồng) cho mỗi kilômét. Viết biểu thức biểu diễn số tiền mà cả nhóm phải trả khi đi quãng đường dài x (km) trong trường hợp $0 < x \leq 10$ (km) và trường hợp $10 < x \leq 30$ (km).

B. Phần Hình học

1. Cho tam giác ABC cân tại A có AM là trung tuyến. Đường cao BE cắt AM tại H. Chứng minh CH vuông góc với AB.

2. Cho tam giác DEF vuông tại D có cạnh DE = 12 cm, cạnh DF = 16 cm.

Trên cạnh DF lấy điểm A sao cho DA = DE (A nằm giữa D và F). Trên tia đối của tia ED lấy điểm B sao cho DB = DF (E nằm giữa D và B). Kẻ DH là đường cao của $\triangle DEF$. Đường thẳng DH cắt AB tại P.

a) Tính độ dài cạnh EF.

b) Chứng minh $\triangle DEF = \triangle DAB$.

c) Chứng minh DP là trung tuyến của $\triangle DAB$.

3. Tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH. Trên tia đối của tia HC lấy điểm D sao cho HD = HC.

a) Chứng minh rằng AC = AD.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ADB} = \widehat{BAH}$.

4. Tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho BA = BN. Kẻ $BE \perp AN$ ($E \in AN$).

a) Chứng minh BE là tia phân giác của góc ABN.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi K là giao điểm của AH với BE. Chứng minh $NK \parallel CA$.

c) Đường thẳng BK cắt AC tại F. Gọi G là giao điểm của đường thẳng AB với NF. Chứng minh tam giác GBC cân.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm M sao cho H là trung điểm của AM.

a) Chứng minh rằng tam giác ABM cân.

b) Chứng minh tam giác ABC bằng tam giác MBC.

c) Đường thẳng song song với AB kẻ từ M lần lượt cắt BC, AC tại I và N. Chứng minh đường thẳng AI vuông góc với MC.



CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Địa chỉ : 231 Nguyễn Văn Cừ, quận 5, TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : (028) 38.323.767 | Fax : (028) 38.391.473

Website : www.xuatbangiadinh.vn



VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC PHƯƠNG NAM

Địa chỉ : 231 Nguyễn Văn Cừ, quận 5, TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : (028) 38.357.197 - Fax : (028) 38.305.002

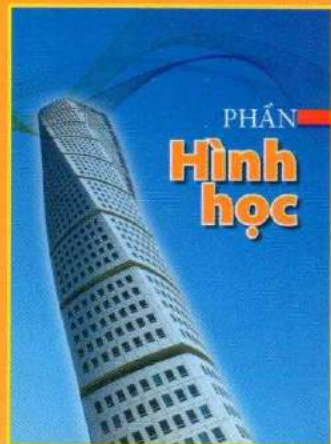
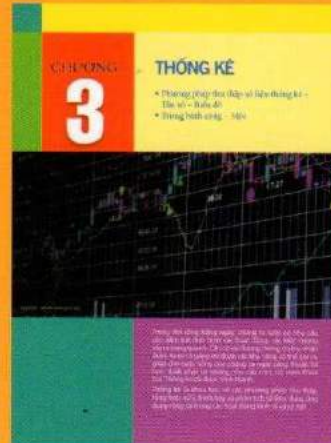
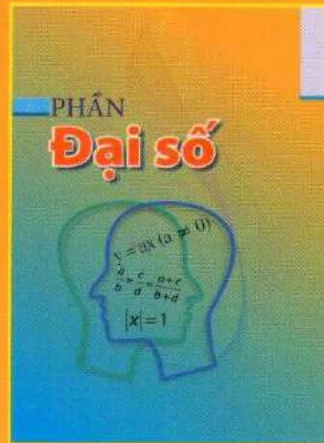
Website : www.sachhocktro.com.vn

**TÀI LIỆU
DẠY-HỌC**

TOÁN

7

**TẬP
HAI**



Bộ sách được phát hành tại :

• **CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC PHƯƠNG NAM**

Địa chỉ : 231 Nguyễn Văn Cừ, quận 5, TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : (028) 3835.1363 - (028) 3835.7197

Fax : (028) 3830.5002 - (028) 3830.5817

Website : www.sachhocktro.com.vn

• **CÔNG TY CP SÁCH VÀ THIẾT BỊ TRƯỜNG HỌC CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ**

• **CÁC CỬA HÀNG SÁCH TẠI TP. HỒ CHÍ MINH :**

• 231 Nguyễn Văn Cừ, quận 5. Điện thoại : (028) 3835.2859

• 223 Nguyễn Tri Phương, quận 5. Điện thoại : (028) 3859.1410

• 261C Lê Quang Định, quận Bình Thạnh. Điện thoại : (028) 3551.5257

• 116 Đinh Tiên Hoàng, quận Bình Thạnh. Điện thoại : (028) 3899.7116

ISBN: 978-604-0-07855-1



9 786040 078551

Giá: 59.000 đ

